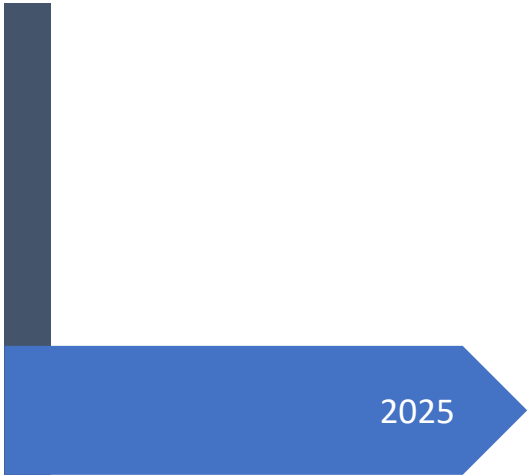
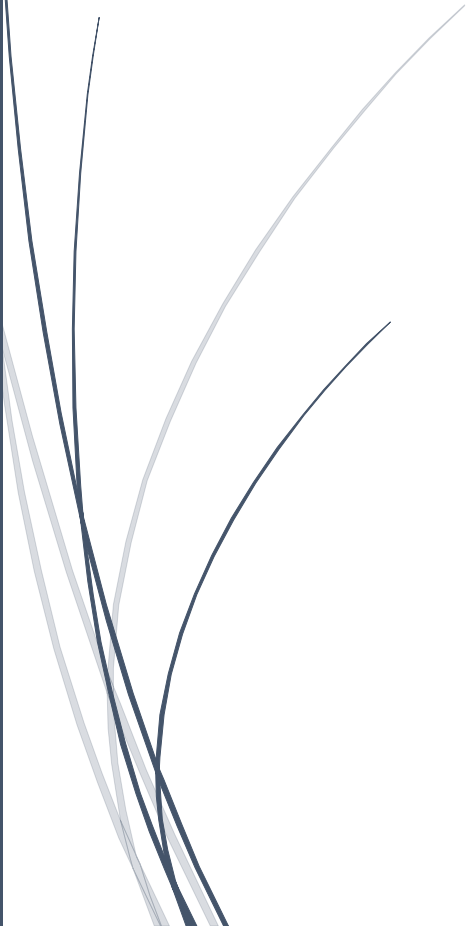


A dark blue vertical bar runs down the left side of the page. A blue arrow points to the right from the bar, containing the year 2025.

2025

RIEŠENÉ ÚLOHY

z astronómie a astrofyziky

Several thin, curved lines in dark blue and light grey originate from the bottom left corner and sweep upwards and to the right.

MARIÁN KRAJČOVIČ
HVEZDÁREŇ V PARTIZÁNSKOM

Obsah

Úvod.....	3
Technická poznámka pre čitateľov	4
1 Pohyby telies na oblohe a základná orientácia	5
1.1 Teoretický úvod	5
1.2 Denný pohyb Slnka a hviezd	6
1.3 Ekliptika, ročné obdobia	8
1.4 Rektascenzia, deklinácia, azimut, výška	10
1.5 Lokálny horizontálny systém	12
1.6 Výpočty východov a západov	15
2 Pozorovacie metódy a prístroje	18
2.1 Teoretický úvod	18
2.2 Základné typy ďalekohľadov	19
2.3 Zväčšenie, svetelnosť, rozlišovacia schopnosť	21
2.4 Odhady jasnosti, pozorovanie objektov	23
2.5 Spektroskopia a fotometria (jednoduché aplikácie)	25
3 Paralaxa a určovanie vzdialeností.....	28
3.1 Teoretický úvod	28
3.2 Ročná paralaxa	29
3.3 Trigonometrické a fotometrické určenie vzdialeností	31
3.4 Metódy pomocou štandardných sviec	33
4 Základy mechaniky v astrofyzike	36
4.1 Teoretický úvod	36
4.2 Gravitačný zákon, obeh planét a družíc	37
4.3 Keplerove zákony	40
4.4 Úniková rýchlosť, gravitačná potenciálna energia	42
5 Svetlo a elektromagnetické žiarenie	45
5.1 Teoretický úvod	45
5.2 Spektrum hviezd, Wienov zákon, Stefanov-Boltzmannov zákon.....	46
5.3 Absolútna a zdanlivá hviezdna veľkosť	48
5.4 Prienik svetla cez atmosféru – absorpcia, scintilácia.....	50
6 Hviezdy – vznik, vývoj a vlastnosti.....	52
6.1 Teoretický úvod	52
6.2 Hmotnosť, teplota, svietivosť, spektrálna klasifikácia	53
6.3 Hertzsprungov-Russellov (HR) diagram	55

6.4	Životné cykly hviezd	57
6.5	Bieli trpaslíci, neutrónové hviezdy, čierne diery	59
7	Exoplanéty a ich detekcia	62
7.1	Teoretický úvod	62
7.2	Tranzitná metóda, radiálna rýchlosť.....	64
7.3	Výpočty parametrov exoplanét.....	66
7.4	Obývateľné zóny.....	68
8	Galaxie a štruktúra vesmíru	71
8.1	Teoretický úvod	71
8.2	Typy galaxií, ich zložky	72
8.3	Rotačné krivky galaxií, temná hmota	74
9	Kozmológia	79
9.1	Teoretický úvod	79
9.2	Veľký tresk, vývoj vesmíru	80
9.3	Červený posun, kozmologické vzdialenosti.....	82
9.4	Temná energia a expanzia vesmíru	84
10	Astronomická navigácia a história	87
10.1	Teoretický úvod	87
10.2	Meranie času (slnečný, siderický, UTC).....	89
10.3	Kalendáre, rovník, rovník, precesia.....	91
10.4	Historické metódy merania polôh a vzdialeností.....	93
11	Neriešené príklady na precvičenie	97
	Záver.....	105

Úvod

„Najnepochopiteľnejšie na vesmíre je, že je pochopiteľný.“ (Albert Einstein)

Človek vždy hľadel k oblohe. Už staroveké civilizácie si všímali pravidelnosti v pohybe Slnka, Mesiaca a hviezd, čím položili základy astronómie – prvej exaktnej vedy. Dnes, o tisícročia neskôr, sme vďaka technológiám schopní nahliadnuť do hlbín vesmíru, merať vlastnosti hviezd, objavovať planéty pri vzdialených slnkách či skúmať vývoj samotného kozmu. No napriek všetkým pokrokom ostáva podstata rovnaká – **snažíme sa pochopiť vesmír prostredníctvom pozorovania, otázok a výpočtov.**

Táto zbierka 228 úloh a príkladov vznikla s cieľom prepojiť **teóriu s praxou** a ukázať, že aj zdánlivo vzdialené objekty na oblohe možno skúmať pomocou známych fyzikálnych zákonov a trošky matematiky.

Na rozdiel od mnohých učebníc sa nesústredí primárne na podrobný výklad pojmov – ten predpokladá aspoň na základnej úrovni – ale poskytuje **výber výpočtových úloh**, ktoré sú tematicky usporiadané a vedú čitateľa **od základov astronómie až po pokročilejšie koncepty astrofyziky a kozmológie.**

Pre koho je táto kniha určená?

- **Pre študentov**, ktorí chcú objaviť, že astronómia nie je len o krásnych obrázkoch, ale aj o porozumení a počítaní.
- **Pre učiteľov**, ktorí hľadajú inšpiratívne zadania pre svojich žiakov.
- **Pre záujemcov o astronómiu**, ktorí si chcú precvičiť schopnosť logického uvažovania a fyzikálneho odhadu.
- A tiež pre **súťažiacich**, ktorí sa pripravujú na astronomické či fyzikálne olympiády.

Ako je publikácia usporiadaná?

Zbierka je rozdelená do tematických kapitol – každá zodpovedá jednému veľkému celku astronómie (napr. pohyb telies, svetlo, hviezdy, galaxie, kozmológia...). V rámci knihy nájdete:

- **Jednoduchšie riešené úlohy** s detailným postupom výpočtu.
- **Zložitejšie príklady bez riešenia**, kde je uvedený iba výsledok. Tieto predstavujú „výzvy na zamyslenie“, ktoré čitateľa povzbudzujú k samostatnému riešeniu.

Tieto „výzvy“ nie sú len matematickými cvičeniami – **sú pozvánkou do sveta reálnej astronómie**, v ktorej sa merania, výpočty a modely stávajú nástrojmi na pochopenie sveta okolo nás.

Prečo počítat' astronómiu?

V dobe, keď máme aplikácie, ktoré nám povedia, kde sa na oblohe nachádza Mars alebo kedy vyjde Mesiac, sa môže zdať výpočtová astronómia zbytočná. Opak je pravdou. Práve schopnosť **rozumieť číslam, odhadu, súvislostiam medzi veličinami** či **základným zákonom fyziky** je to, čo robí z astronómie skutočnú vedu. Táto kniha Vás k tomu môže priblížiť.

Veríme, že táto publikácia nebude len zbierkou čísel, ale **sprievodcom, ktorý Vás povzbudí klásť otázky, samostatne premýšľať a objavovať krásu vesmíru aj cez rovnice a čísla.**

Technická poznámka pre čitateľov

Táto zbierka úloh je určená študentom, učiteľom, záujemcom o astronómiu, ako aj všetkým, ktorí si chcú precvičiť či prehĺbiť porozumenie fyzikálnych princípov vo vesmíre. Príklady sú rozdelené podľa tematických kapitol, ktoré sledujú prirodzený vývoj astronomických poznatkov od základov po kozmológiu.

Ako pracovať so zbierkou

- **Zadania** sú zostavené tak, aby čitateľa viedli aj k samostatnému premýšľaniu.
- **Riešené príklady** obsahujú postup krok za krokom, zatiaľ čo posledná časť knihy **obsahuje len zadania a výsledky** – ako výzvu na samostatné riešenie.
- Zložitosť úloh sa v rámci podkapitoly postupne zvyšuje, pričom ku každej kapitole sú zaradené aj náročnejšie príklady pre pokročilých.

Použité symboly a jednotky

- Používame **medzinárodnú sústavu jednotiek SI**, s občasnými výnimkami typickými pre astronómiu (napr. svetelné roky, parseky, astronomické jednotky).
- Bežne používané symboly:
 - $R_{\odot}$ – polomer Slnka
 - $M_{\odot}$ – hmotnosť Slnka
 - $L_{\odot}$ – svietivosť Slnka
 - AU – astronomická jednotka (vzdialenosť Zem–Slnko)
 - pc – parsek ($1 \text{ pc} \approx 3.26 \text{ ly}$)
 - ly – svetelný rok
 - $g_{\odot}$ – povrchová gravitácia Slnka

O presnosti a zaokrúhľovaní

Väčšina výpočtov je vykonaná s cieľom poskytnúť **odhad správneho rádu veľkosti**, nie vždy presnú číselnú odpoveď. Výsledky sú zväčša zaokrúhlené na 2 až 3 platné cifry, ak to kontext dovoľuje. V prípade extrémnych hodnôt (napr. hmotnosť čiernej diery) je uprednostnený **vedecký zápis**.

1 Pohyby telies na oblohe a základná orientácia

1.1 Teoretický úvod

Horizontálny súradnicový systém (azimutálny)

- Azimut (A): Uhol od severu po smere hodinových ručičiek k bodu, kde sa objekt nachádza nad obzorom. Udáva sa v stupňoch ($0^\circ - 360^\circ$).
- Výška (h): Uhol nad obzorom (0° až 90°). Objekt priamo nad hlavou má výšku 90° , na obzore 0° .

Vzťah:

$$h = \arcsin(\sin\delta \cdot \sin\phi + \cos\delta \cdot \cos\phi \cdot \cos H)$$

Ekvatoriálny súradnicový systém

- Rektascenzia (α): Uhlová vzdialenosť pozdĺž nebeského rovníka od jarného bodu po daný objekt. Vyjadruje sa zvyčajne v hodinách, minútach a sekundách ($1h = 15^\circ$).
- Deklinácia (δ): Uhol nad alebo pod nebeským rovníkom (-90° až $+90^\circ$).

Vzťah medzi súradnicami (pri známej zemepisnej šírke ϕ a hviezdnom čase)

- Hodinový uhol (H):

$$H = \text{lokalny hviezdny čas} - \alpha$$

→ vyjadruje, ako ďaleko je objekt od miestneho poludníka.

Denný pohyb

- Spôsobený rotáciou Zeme okolo osi – objekty sa zdanlivo pohybujú z východu na západ.
- Rýchlosť zdanlivého pohybu:

$$\omega = \frac{360^\circ}{23^h56^m04^s} \approx 15^\circ/\text{hod}$$

- Jeden siderický deň: $\sim 23h\ 56m$.

Ročný pohyb Slnka

- Spôsobený obehom Zeme okolo Slnka.
- Zdanlivý pohyb Slnka po ekliptike – Slnko prejde 1° za deň.

Maximálna výška objektu pri kulminácii (prechod cez poludník):

$$h_{\max} = 90^\circ - |\phi - \delta|$$

Podmienky viditeľnosti:

- Objekt vychádza a zapadá, ak platí:
 $|\delta| < 90^\circ - \phi$
- Objekt je cirkumpolárny (nevychádza ani nezapadá), ak:
 $\delta > 90^\circ - \phi$ (pre severnú pologuľu)

Praktické využitie súradníc

- Ak poznáme čas a polohu pozorovateľa, môžeme prepočítať rektascenziu a deklináciu na výšku a azimut.
- Na orientáciu na oblohe často stačí:
 - Západ: 270° , Východ: 90° , Sever: 0° , Juh: 180°

- Priemer mesiaca alebo Slnka na oblohe je $\sim 0,5^\circ$
- Päť natiahnutej ruky = cca 10° uhlovej vzdialenosti

1.2 Denný pohyb Slnka a hviezd

Príklad 1: Trvanie viditeľnosti hviezdy

Zadanie:

Hviezda vychádza o 20:00 a zapadá o 4:00 nasledujúceho dňa. **Ako dlho** je táto hviezda **nad obzorom**?

Riešenie:

Od 20:00 do polnoci = 4 hodiny

Od polnoci do 4:00 = 4 hodiny

Celkový čas nad obzorom:

$$4 \text{ h} + 4 \text{ h} = 8 \text{ hodín}$$

Výsledok:

➡ Hviezda je nad obzorom **8 hodín**.

Príklad 2: Dĺžka denného osvetlenia

Zadanie:

Slnko vychádza o **6:30** a zapadá o **18:30**.

Ako dlho trvá deň (osvetlenie)?

Riešenie:

Od 6:30 do 18:30 je rozdiel:

$$18:30 - 6:30 = 12 \text{ hodín}$$

Výsledok:

➡ Denné osvetlenie trvá **12 hodín**.

Príklad 3: Maximálna výška Slnka – rovnodennosť

Zadanie:

Vypočítaj **maximálnu výšku Slnka** počas **jarnej rovnodennosti** pre pozorovateľa na **zemepisnej šírke 48° severnej**.

Riešenie:

Počas rovnodennosti je deklinácia Slnka:

$$\delta = 0^\circ$$

Vzorec na výšku pri kulminácii:

$$h_{\max} = 90^\circ - |\phi - \delta| = 90^\circ - |48^\circ - 0^\circ| = 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ$$

Výsledok:

→ Maximálna výška Slnka nad obzorom je **42°**.

Príklad 4: Výška Slnka pri zimnom slnovrate**Zadanie:**

Vypočítaj **maximálnu výšku Slnka** počas **zimného slnovratu** pre pozorovateľa na **rovníku** ($\phi = 0^\circ$). Počas zimného slnovratu je **deklinácia Slnka** $\delta = -23,5^\circ$.

Riešenie:

$$h_{\max} = 90^\circ - |\phi - \delta| = 90^\circ - |0^\circ - (-23,5^\circ)| = 90^\circ - 23,5^\circ = 66,5^\circ$$

Výsledok:

→ Maximálna výška Slnka nad obzorom je **66,5°**.

Príklad 5: Hodinový uhol pri kulminácii**Zadanie:**

Pozorovateľ na zemepisnej šírke **50° N** sleduje hviezdu s deklináciou $\delta = +20^\circ$. Hviezda má rektascenziu $\alpha = 12^h$ a miestny hviezdny čas (LST) je taktiež **12h**.

Otázka: Kedy nastáva kulminácia? Aký je hodinový uhol a čo znamená?

Riešenie:

Hodinový uhol H vypočítame zo vzťahu:

$$H = \text{LST} - \alpha = 12^h - 12^h = 0^h$$

→ objekt je práve na miestnom poludníku, teda kulminuje.

Záver:

Hviezda **kulminuje práve teraz**.

Hodinový uhol $H = 0^h$ znamená, že hviezda kulminuje – nachádza sa na miestnom poludníku a je v najvyššom bode svojej dennej dráhy na oblohe.

Výsledok:

→ Hviezda **kulminuje** – $H = 0^h$ – je na miestnom poludníku.

Príklad 6: Cirkumpolárnosť hviezdy**Zadanie:**

Pozorovateľ sa nachádza na **60° severnej šírky**. Sleduje hviezdu s **deklináciou** $\delta = +40^\circ$.

Otázka: Je táto hviezda cirkumpolárna?

Riešenie:

Podmienka pre cirkumpolárnosť na severnej pologuli:

$$\delta > 90^\circ - \phi = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Porovnáme:

$$\delta = 40^\circ > 30^\circ$$

Výsledok:

→ Hviezda je **cirkumpolárna** – **nikdy nezapadá**.

1.3 Ekliptika, ročné obdobia

Príklad 1: Kedy je jar?

Zadanie:

Doplň do viet správne odpovede:

- Jarná rovnodennosť na severnej pologuli nastáva približne ____.
- Počas rovnodennosti sú deň a noc ____.
- Ekliptika pretína nebeský rovník v ____ bode rovnodennosti.

Riešenie:

- 21. marec
- rovnako dlhé
- dvoch (jarnej a jesennej)

Výsledok:

→ Jarná rovnodennosť nastáva **okolo 21. marca**. Deň a noc sú rovnako dlhé. **Ekliptika pretína rovník v dvoch bodoch rovnodennosti**.

Príklad 2: Sklon Zeme a ročné obdobia

Zadanie:

Aký je sklon zemskej osi voči rovine ekliptiky?

Prečo vďaka tomuto sklonu vznikajú ročné obdobia?

Riešenie:

Sklon zemskej osi:

$$\varepsilon = 23,5^\circ$$

Počas **roka** sa Zem pohybuje po **takmer kruhovej dráhe** okolo Slnka. Keďže os rotácie je naklonená a **zachováva si svoj smer v priestore**, rôzne časti Zeme sú počas roka osvetlené rôzne intenzívne. V **lete na severnej pologuli** je severný pól naklonený **smerom k Slnku** → dni sú dlhšie a slnečné lúče dopadajú strmšie. V **zime** je severný pól odklonený od Slnka → dni sú kratšie a slnečné lúče dopadajú šikmejšie.

Výsledok:

→ Sklon zemskej osi je **23,5°**. **Ročné obdobia vznikajú kvôli tomuto sklonu počas obehu Zeme okolo Slnka**.

Príklad 3: Slnko v zenite

Zadanie:

Na akej zemepisnej šírke môže byť Slnko počas roka v zenite? Uveď maximálne hodnoty a vysvetli, prečo inde nie.

Riešenie:

Slnko môže byť v zenite iba v pásme medzi obratníkmi:

$$-23,5^\circ \leq \delta \leq +23,5^\circ$$

To znamená, že len medzi obratníkom Raka ($23,5^\circ$ N) a obratníkom Kozorožca ($23,5^\circ$ S) môže Slnko kulminovať v zenite.

Výsledok:

→ Slnko môže byť v zenite **len medzi $\pm 23,5^\circ$ zemepisnej šírky**. Inde nie, pretože deklinácia Slnka nikdy nepresiahne túto hodnotu – v dôsledku sklonu zemskej osi..

Príklad 4: Dĺžka dňa počas leta**Zadanie:**

Vypočítaj dĺžku dňa (čas medzi východom a západom Slnka) počas **letného slnovratu** ($\delta = +23,5^\circ$) pre zemepisnú šírku $\phi = 50^\circ$ severnej šírky.

Použi priblížený vzorec:

$$\cos h_0 = -\tan \phi \cdot \tan \delta$$

kde h_0 je poludníkový uhol pri východe/západe, potom:

$$t = \frac{2h_0}{15}$$

Riešenie:

1. Vypočítame:

$$\cos h_0 = -\tan(50^\circ) \cdot \tan(23,5^\circ) \approx -1,1918 \cdot 0,4348 \approx -0,518$$

$$h_0 = \arccos(-0,518) \approx 121,2^\circ$$

2. Prevod na čas:

$$t = \frac{2 \cdot 121,2^\circ}{15} \approx 16,2 \text{ hodín}$$

Výsledok:

→ Počas letného slnovratu je **deň dlhý približne 16,2 hodiny**.

Príklad 5: Analema a výška Slnka**Zadanie:**

Pozorovateľ denne meria výšku Slnka na poludnie. Zistí, že v priebehu roka výška kolíše. Vysvetli, prečo vzniká tzv. **analema** – zakrivený tvar, ktorý Slnko opisuje na oblohe každý deň v rovnaký čas.

Riešenie:

Analema vzniká kvôli kombinácii:

– **Sklonu zemskej osi ($23,5^\circ$)** → mení sa deklinácia Slnka

- **Nepravidelnému (eliptickému) pohybu Zeme** → zmena rýchlosti Zeme spôsobuje posun slnečného času oproti občianskemu

Tieto dva efekty spôsobujú, že poloha Slnka v rovnakom čase počas roka opisuje zakrivený tvar – analemu.

Výsledok:

→ Analema vzniká kombináciou kolísania výšky Slnka (v dôsledku deklinácie) a nerovnomerného pohybu Zeme. Výsledkom je zakrivený tvar osmičky, ktorý zobrazuje, **ako sa Slnko javí v rovnaký čas počas celého roka.**

Príklad 6: Astronomické definície ročných období

Zadanie:

Definuj astronomicky začiatok ročných období. Ktoré astronomické javy ich ohraničujú? Aké hodnoty má deklinácia Slnka pri týchto bodoch?

Riešenie:

- **Jarná rovnodennosť:** Slnko prechádza nebeským rovníkom smerom na sever → $\delta = 0^\circ$
- **Letný slnovrat:** Slnko má maximálnu severnú deklináciu → $\delta = +23,5^\circ$
- **Jesenná rovnodennosť:** Slnko prechádza nebeským rovníkom smerom na juh → $\delta = 0^\circ$
- **Zimný slnovrat:** Slnko má maximálnu južnú deklináciu → $\delta = -23,5^\circ$

Výsledok:

→ Ročné obdobia sú určené **pohybom Slnka po ekliptike** – rovnodennosti nastávajú **pri $\delta = 0^\circ$** , slnovraty **pri maximálnej kladnej alebo zápornej deklinácii.**

1.4 Rektascenzia, deklinácia, azimut, výška

Príklad 1: Pomenovanie súradníc

Zadanie:

Doplň chýbajúce výrazy:

- Rektascenzia (RA) je obdoba _____ v zemepisných súradniciach.
- Deklinácia (Dec) je obdoba _____.
- Azimut sa meria od _____ smerom _____.
- Výška objektu je uhlová vzdialenosť od _____.

Riešenie:

- Rektascenzia → zemepisná dĺžka
- Deklinácia → zemepisná šírka
- Azimut → od severu smerom na východ
- Výška → od horizontu

Výsledok:

→ RA = obdoba dĺžky, Dec = obdoba šírky, azimut sa meria od severu na východ, výška je vzdialenosť od obzoru.

Príklad 2: Východ a západ hviezdy

Zadanie:

V ktorých bodoch horizontu (azimutálne) vychádza a zapadá hviezda, ktorá sa nachádza na nebeskom rovníku (deklinácia 0°)? Predpokladaj, že si na rovníku Zeme.

Riešenie:

Na rovníku Zeme ($\phi = 0^\circ$):

- Hviezdy na deklinácii 0° vychádzajú **presne na východe (azimut 90°)**
- a zapadajú **presne na západe (azimut 270°)**

Výsledok:

→ Na rovníku hviezda na deklinácii 0° vychádza na azimute 90° a zapadá na 270° .

Príklad 3: Výška Polárky

Zadanie:

Aká je výška Polárky nad obzorom pri pozorovaní z Partizánskeho ($\phi \approx 48,6^\circ$)? (Zjednoduši, že Polárka je presne na severnom nebeskom póle.)

Riešenie:

Polárka sa nachádza približne v smere nebeského pólu. Jej výška nad obzorom sa rovná zemepisnej šírke pozorovateľa:

$$h = \phi = 48,6^\circ$$

Výsledok:

→ Polárka je nad obzorom **vo výške približne $48,6^\circ$** .

Príklad 4: Najvyššia výška hviezdy

Zadanie:

Urči najvyššiu výšku nad obzorom (pri kulminácii) hviezdy s deklináciou $\delta = -10^\circ$, ak pozorovateľ je na $\phi = +50^\circ$ severnej šírky.

Použi vzorec:

$$h = 90^\circ - |\phi - \delta|$$

Riešenie:

$$h = 90^\circ - |50^\circ - (-10^\circ)| = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Výsledok:

→ Hviezda kulminuje **vo výške 30° nad obzorom**.

Príklad 5: Východ hviezdy – azimutálny výpočet

Zadanie:

Vypočítaj azimut hviezdy pri jej východe, ak má deklináciu $\delta = +20^\circ$, a pozorovateľ je na $\varphi = +48,6^\circ$.

Použi vzorec:

$$\cos A = \frac{\sin \delta}{\cos \phi}$$

Riešenie:

$$\cos A = \frac{\sin(20^\circ)}{\cos(48,6^\circ)} \approx \frac{0,3420}{0,6612} \approx 0,5172$$

$$A = \arccos(0,5172) \approx 58,9^\circ$$

Výsledok:

→ Hviezda vychádza pod azimutom **približne $58,9^\circ$** .

Príklad 6: Prevod medzi súradnicami

Zadanie:

Pozorovateľ na $\varphi = 48^\circ$ severnej šírky pozoruje hviezdu s deklináciou $\delta = +30^\circ$ a hodinovým uhlom $H = 4h$ (tj. 60°).

Vypočítaj výšku hviezdy nad obzorom pomocou vzorca:

$$\sin h = \sin \phi \cdot \sin \delta + \cos \phi \cdot \cos \delta \cdot \cos H$$

Riešenie:

Dosadíme:

$$\sin h = \sin(48^\circ) \cdot \sin(30^\circ) + \cos(48^\circ) \cdot \cos(30^\circ) \cdot \cos(60^\circ)$$

$$\sin h \approx 0,7431 \cdot 0,5 + 0,6691 \cdot 0,8660 \cdot 0,5 \approx 0,3716 + 0,2896 = 0,6612$$

$$h \approx \arcsin(0,6612) \approx 41,4^\circ$$

Výsledok:

→ Hviezda sa nachádza **vo výške približne $41,4^\circ$ nad obzorom**.

1.5 Lokálny horizontálny systém

Príklad 1: Strany sveta a azimut

Zadanie:

Doplň hodnoty azimutov pre hlavné svetové strany:

- Sever:
- Východ:
- Juh:

- Západ:

Riešenie:

Azimut sa meria **od severu smerom na východ**, teda:

- Sever: 0° (aj 360°)
- Východ: 90°
- Juh: 180°
- Západ: 270°

Výsledok:

→ $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$

Príklad 2: Výška objektu nad horizontom

Zadanie:

Pozorovateľ vidí planétu nízko nad juhovýchodným obzorom vo výške 15° . Aký azimut má objekt približne?

Riešenie:

Juhovýchod = smer medzi juhom (180°) a východom (90°), čiže azimut je približne:

$$A = \frac{90^\circ + 180^\circ}{2} = 135^\circ$$

Výsledok:

→ Planéta má azimut **približne 135° a výšku 15°** .

Príklad 3: Zmena výšky počas noci

Zadanie:

Hviezda kulminuje o 23:00 vo výške 70° . O 2 hodiny neskôr (01:00) má hodinový uhol $H = 30^\circ$. Aká je jej výška v tom čase?

Použi vzorec:

$$\sinh = \sin\phi \cdot \sin\delta + \cos\phi \cdot \cos\delta \cdot \cos H$$

(Prijmime: $\phi = 48^\circ$, $\delta = 30^\circ$)

Riešenie:

Dosadíme:

$$\sinh = \sin(48^\circ) \cdot \sin(30^\circ) + \cos(48^\circ) \cdot \cos(30^\circ) \cdot \cos(30^\circ)$$

$$\sinh \approx 0,7431 \cdot 0,5 + 0,6691 \cdot 0,8660 \cdot 0,8660 \approx 0,3716 + 0,5019 = 0,8735$$

$$h \approx \arcsin(0,8735) \approx 60,8^\circ$$

Výsledok:

→ Výška hviezdy o 2 hodiny po kulminácii je **približne $60,8^\circ$** .

Príklad 4: Objekt priamo na juhu

Zadanie:

Objekt sa nachádza priamo na juhu vo výške 40° . Urč jeho azimut a opíš, kde by si ho mal na oblohe hľadať.

Riešenie:

Ak je objekt na juhu, má **azimut 180°** . Výška 40° znamená, že je mierne nad polovicou medzi obzorom a zenitom.

Výsledok:

➡ **Azimut = 180° , výška = 40° . Objekt je na južnej oblohe, vyššie nad horizontom.**

Príklad 5: Výpočet azimutu pri východe hviezd

Zadanie:

Ak má hviezda deklináciu $\delta = +45^\circ$ a pozorovateľ je na $\phi = 50^\circ$, vypočítaj azimut hviezdy pri jej východe.

Použi vzorec:

$$\cos A = \frac{\sin \delta}{\cos \phi}$$

Riešenie:

Dosadíme:

$$\cos A = \frac{\sin(45^\circ)}{\cos(50^\circ)} = \frac{0,7071}{0,6428} \approx 1,100$$

Problém: Hodnota presahuje 1 $\rightarrow$ chyba! To znamená, že **hviezda nikdy nevychádza ani nezapadá – je stále nad obzorom.**

Záver:

Ak $\frac{\sin \delta}{\cos \phi} > 1$, ide o **cirkumpolárnu hviezdu**, ktorá **nezapadá**.

Výsledok:

➡ Hviezda je **cirkumpolárna – nevychádza ani nezapadá.**

Príklad 6: Sférický trojuholník – výpočet výšky z hodín a RA

Zadanie:

Zemepisná šírka $\phi = 48^\circ$. Hviezda má deklináciu $\delta = -10^\circ$, hodinový uhol $H = 60^\circ$. Vypočítaj výšku objektu nad horizontom.

Použi:

$$\sin h = \sin \phi \cdot \sin \delta + \cos \phi \cdot \cos \delta \cdot \cos H$$

Riešenie:

$$\sin h = \sin(48^\circ) \cdot \sin(-10^\circ) + \cos(48^\circ) \cdot \cos(10^\circ) \cdot \cos(60^\circ)$$

$$\sin h \approx 0,7431 \cdot (-0,1736) + 0,6691 \cdot 0,9848 \cdot 0,5 \approx -0,1290 + 0,3293 = 0,2003$$

$$h \approx \arcsin(0,2003) \approx 11,6^\circ$$

Výsledok:

→ Hviezda je **11,6° nad horizontom**.

1.6 Výpočty východov a západov

Príklad 1: Východ Slnka a svetové strany

Zadanie:

V ktorých smeroch vychádza Slnko počas roka? Uveď azimuty pre rovníkovú, letný a zimný slnovrat.

Riešenie:

Na severnej pologuli:

- **Rovníková:** Slnko vychádza **presne na východe** → azimut $\approx 90^\circ$
- **Lietny slnovrat** ($\delta \approx +23,5^\circ$): Slnko vychádza **severovýchodne** → azimut $\approx 50-60^\circ$
- **Zimný slnovrat** ($\delta \approx -23,5^\circ$): Slnko vychádza **juhovýchodne** → azimut $\approx 120-130^\circ$

Výsledok:

→ Azimuty východu Slnka sa pohybujú približne medzi **60° až 130°**, v závislosti od ročného obdobia.

Príklad 2: Hviezda zapadá presne na západe

Zadanie:

Hviezda má deklináciu $\delta = 0^\circ$. Pozorovateľ je na $\phi = 45^\circ$. V ktorom azimute zapadá?

Riešenie:

Ak $\delta = 0^\circ \rightarrow$ hviezda leží na nebeskom rovníku $\rightarrow$ vychádza a zapadá presne na východe a západe.

Výsledok:

→ Azimut západu = **270°**, azimut východu = **90°**

Príklad 3: Výpočet hodinového uhla pri východe

Zadanie:

Hviezda má deklináciu $\delta = +20^\circ$. Pozorovateľ sa nachádza na zemepisnej šírke $\phi = 48^\circ$. Vypočítaj hodinový uhol pri východe (H_0).

Použi vzorec:

$$\cos H_0 = -\tan \phi \cdot \tan \delta$$

Riešenie:

$$\tan(48^\circ) \approx 1,1106, \quad \tan(20^\circ) \approx 0,3640$$

$$\cos H_0 = -1,1106 \cdot 0,3640 = -0,4042 \Rightarrow H_0 = \arccos(-0,4042) \approx 114,0^\circ$$

Prevod na čas:

$$114^\circ \cdot \frac{24 \text{ h}}{360^\circ} \approx 7,6 \text{ h}$$

Výsledok:

→ Hviezda vychádza a zapadá **7 h 36 min pred/po kulminácii**.

Príklad 4: Ako dlho je Slnko nad obzorom

Zadanie:

Vypočítaj dĺžku dňa (v hodinách), ak je Slnko v deklinácii $\delta = +23,5^\circ$ a pozorovateľ na $\varphi = 50^\circ$.

Riešenie:

$$\cos H_0 = -\tan \varphi \cdot \tan \delta = -\tan(50^\circ) \cdot \tan(23,5^\circ) \approx -1,1918 \cdot 0,4348 = -0,5184$$

$$H_0 = \arccos(-0,5184) \approx 121,2^\circ \Rightarrow \text{dĺžka dňa} = 2H_0 = 242,4^\circ$$

$$\frac{242,4^\circ}{15^\circ/\text{hod}} \approx 16,2 \text{ hodín}$$

Výsledok:

→ Dĺžka dňa ≈ 16 hodín 12 minút.

Príklad 5: Urči, či hviezda vychádza

Zadanie:

Pozorovateľ je na $\varphi = 60^\circ$. Má hviezda s deklináciou $\delta = +75^\circ$ východ a západ, alebo je stále nad obzorom?

Riešenie:

Použijeme:

$$\cos H_0 = -\tan \varphi \cdot \tan \delta = -\tan(60^\circ) \cdot \tan(75^\circ)$$

$$\tan(60^\circ) = \sqrt{3} \approx 1,732, \quad \tan(75^\circ) \approx 3,732 \Rightarrow \cos H_0 = -1,732 \cdot 3,732 \approx -6,46$$

Takáto hodnota je mimo intervalu $(-1; 1)$, čiže:

Hviezda je stále nad obzorom – **je cirkumpolárna**.

Výsledok:

→ Hviezda nezapadá, **je stále nad obzorom**.

Príklad 6: Východ hviezdy v konkrétnom čase

Zadanie:

Hviezda kulminuje o 23:00. Hodinový uhol pri východe $H_0 = 100^\circ$. Vypočítaj čas východu hviezdy.

Riešenie:

Hodinový uhol 100° zodpovedá:

$$\frac{100^\circ}{15^\circ/\text{hod}} = 6,67 \text{ h} \approx 6 \text{ h } 40 \text{ min}$$

Teda východ hviezdy bol **6 h 40 min pred kulmináciou**.

$$23:00 - 6:40 = 16:20$$

Výsledok:

 Hviezda vychádza o **16:20**.

2 Pozorovacie metódy a prístroje

2.1 Teoretický úvod

Lom (refraktor):

- **Šošovkový objektív** láme svetlo a vytvára obraz.
- Nevýhody: chromatická aberácia, väčšia hmotnosť pri väčších priemeroch.

Odraz (reflektor):

- **Zrkadlový objektív** (primárne zrkadlo) odráža svetlo do ohniska.
- Výhody: bez chromatickej aberácie, možné väčšie priemery.

Katadioptrické systémy:

- Kombinácia zrkadiel a šošoviek (napr. Schmidt-Cassegrain).
- Kompaktné, univerzálne, často používané na pozorovanie aj fotografiu.

Zväčšenie ďalekohľadu

$$Z = \frac{f_{\text{objektívu}}}{f_{\text{okulára}}}$$

Kde f je ohnisková vzdialenosť.

Svetelnosť (zber svetla)

Pomer zberu svetla medzi ďalekohľadom a ľudským okom:

$$P = \left(\frac{D}{D_0}\right)^2$$

- D : priemer objektívu ďalekohľadu
- D_0 : priemer zrenice oka (zvyčajne ~ 7 mm pri tme)

Rozlišovacia schopnosť

Teoretická hranica rozlíšenia – Rayleighovo kritérium / Dawesov limit:

$$\theta = \frac{1,22 \cdot \lambda}{D}$$

Vizuálne odhady jasnosti:

- Porovnávanie jasnosti objektu s referenčnými hviezdami.
- Používa sa pri premenných hviezdach, kométach.

Kreslenie objektov:

- Cenná metóda na precvičenie vnímania detailov.
- Pomáha pri systematickom pozorovaní (napr. pri Messierovom maratóni).

Spektroskopia:

- Rozklad svetla na spektrum.
- Pomocou spektra možno získať informácie o zložení, teplote, rýchlosti objektu (Doplerov jav).

Dopplerov jav (základný vzorec):

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$$

- λ_0 : pôvodná vlnová dĺžka
- $\Delta\lambda$: posun
- v : radiálna rýchlosť
- c : rýchlosť svetla

Fotometria:

- Mierou je **magnitúda (hviezdna veľkosť)**.
- Rozdiel jasností dvoch objektov:

$$m_2 - m_1 = -2,5 \cdot \log_{10} \left(\frac{F_2}{F_1} \right)$$

kde F je tok (jas) objektu.

2.2 Základné typy ďalekohľadov

Príklad 1: Určenie typu ďalekohľadu podľa popisu

Zadanie:

Teleskop má veľké šošovkové objektívy, ktoré lámu svetlo a vytvárajú obraz v ohnisku. Je náchylný na chromatickú aberáciu a býva pomerne dlhý.

O aký typ ďalekohľadu ide?

Riešenie:

Tento popis zodpovedá lomovému (šošovkovému) ďalekohľadu – refraktor. Chromatická aberácia je typická pre šošovky, a fyzická dĺžka tubusu je takmer rovnaká ako ohnisková vzdialenosť.

Výsledok:

 **Refraktor.**

Príklad 2: Výhody reflektora oproti refraktor

Zadanie:

Prečo je reflektor (zrkadlový ďalekohľad) vo veľkých priemeroch výhodnejší ako refraktor?

Riešenie:

Reflektory nemajú chromatickú aberáciu, pretože svetlo odrážajú. Zrkadlá možno podoprieť zozadu, čo umožňuje vytvárať väčšie priemery s nižšou hmotnosťou. Výroba veľkých zrkadiel je tiež lacnejšia ako výroba veľkých šošoviek.

Výsledok:

 Reflektor je **vhodnejší** na veľké priemery **kvôli absencii chromatickej aberácie a konštrukčnej jednoduchosti**.

Príklad 3: Porovnanie dĺžky tubusov

Zadanie:

Refraktor má ohniskovú vzdialenosť 1000 mm a priemer 100 mm. Reflektor Newtonovho typu má rovnaké parametre. Ktorý ďalekohľad bude fyzicky kratší a prečo?

Riešenie:

Refraktor má ohnisko na konci tubusu, preto je tubus dlhý približne ako ohnisková vzdialenosť. Reflektor typu Newton využíva sekundárne zrkadlo, ktoré odkláňa svetlo do strany – fyzická dĺžka tubusu môže byť kratšia ako ohnisková vzdialenosť.

Výsledok:

➡ Reflektor bude **fyzicky kratší ako refraktor**.

Príklad 4: Výber ďalekohľadu na astrofotografiu

Zadanie:

Chceš fotografovať objekty hlbokého vesmíru. Ktorý z týchto ďalekohľadov je najvhodnejší z hľadiska svetelnosti a zorného poľa?

- Refraktor f/10
- Reflektor f/5
- Katadioptrický teleskop f/12

Riešenie:

Nižšie clonové číslo znamená vyššiu svetlosť – kratšie expozičné časy a širšie zorné pole. Reflektor f/5 má najväčšiu svetlosť, vhodnú na fotografovanie difúzných objektov.

Výsledok:

➡ Najvhodnejší je **reflektor f/5**.

Príklad 5: Návrh univerzálneho ďalekohľadu

Zadanie:

Navrhni typ ďalekohľadu vhodný na vizuálne pozorovania aj astrofotografiu, pričom má byť prenosný a kompaktný. Zohľadni typ optiky aj montáže.

Riešenie:

Kompaktnosť a univerzálnosť ponúka katadioptrický ďalekohľad, napr. **Schmidt-Cassegrain**, ktorý kombinuje výhody zrkadiel a korekčných šošoviek.

Montáž by mala byť **ekvatoriálna** (pre presné sledovanie pri fotografii) alebo **alt-azimutálna s GoTo** (na jednoduché ovládanie).

Výsledok:

➡ **Schmidt-Cassegrain na ekvatoriálnej montáži** – najlepšia voľba pre kompaktný, univerzálny ďalekohľad.

Príklad 6: Chromatická aberácia a jej riešenie

Zadanie:

Refraktor má ohniskovú vzdialenosť pre modré svetlo (450 nm) 1000 mm, ale červené svetlo (650 nm) sa zaostruje o 1,5 mm ďalej.

Aký problém to spôsobuje pri pozorovaní a ako sa dá riešiť?

Riešenie:

Chromatická aberácia spôsobuje, že rôzne farby sa zaostrujú v rôznych bodoch – výsledkom je neostrý obraz a farebné lemy.

Možné riešenia: použitie achromatickej alebo apochromatickej šošovky, alebo výber iného typu ďalekohľadu (napr. reflektora).

Výsledok:

➡ Chromatická aberácia spôsobuje farebné lemy – **riešením je korekčná optika alebo výmena za reflektor.**

2.3 Zväčšenie, svetelnosť, rozlišovacia schopnosť

Príklad 1: Výpočet zväčšenia ďalekohľadu

Zadanie:

Teleskop má ohniskovú vzdialenosť objektívu 1000 mm. Použitý okulár má ohniskovú vzdialenosť 25 mm.

Aké je celkové zväčšenie sústavy?

Riešenie:

Zväčšenie sa určí ako podiel ohniskovej vzdialenosti objektívu a okuláru:

$$Z = \frac{f_{\text{obj}}}{f_{\text{ok}}} = \frac{1000}{25} = 40 \times$$

Výsledok:

➡ Zväčšenie je **40×**.

Príklad 2: Svetelnosť ďalekohľadu

Zadanie:

Ktorý z ďalekohľadov bude mať väčšiu svetelnosť (schopnosť zachytiť slabé objekty)?

- Teleskop A: priemer 100 mm
- Teleskop B: priemer 200 mm

Riešenie:

Svetelnosť je úmerná ploche objektívu, teda druhej mocnine priemeru.

Pomer svetelnosti:

$$\left(\frac{200}{100}\right)^2 = 4$$

Výsledok:

→ Teleskop B je **4× svetelnejší** ako teleskop A.

Príklad 3: Rozlišovacia schopnosť ďalekohľadu**Zadanie:**

Vypočítaj teoretickú rozlišovaciu schopnosť ďalekohľadu s priemerom 150 mm.

(Pripomeňme: Dawesov limit: $\theta = \frac{116}{D}$, kde θ je v oblúkových sekundách a D v mm.)

Riešenie:

$$\theta = \frac{116}{150} \approx 0,77''$$

Výsledok:

→ Teoretická rozlišovacia schopnosť je **približne 0,77 oblúkových sekúnd**.

Príklad 4: Maximálne použiteľné zväčšenie**Zadanie:**

Odporúčané maximálne zväčšenie ďalekohľadu sa často udáva ako 2× priemer v mm. Aký je limit pre ďalekohľad s priemerom 130 mm?

Riešenie:

$$Z_{\max} = 2 \times 130 = 260 \times$$

Výsledok:

→ Maximálne odporúčané zväčšenie je **260×**.

Príklad 5: Porovnanie dvoch ďalekohľadov pri rovnakej veľkosti**Zadanie:**

Máme dva ďalekohľady, oba s priemerom 150 mm. Prvý má ohniskovú vzdialenosť 1500 mm, druhý 750 mm.

Ktorý z nich je „rýchlejší“ (svetelnejší pre fotografiu) a ako to ovplyvní ich praktické použitie?

Riešenie:

Clonové číslo:

- Prvý: f/10
- Druhý: f/5

Nižšie clonové číslo → väčšia svetelnosť (kratšie expozičné časy).

Teleskop s f/5 je teda vhodnejší na fotografiu.

f/10 bude mať menšie zorné pole, je vhodnejší na planéty.

Výsledok:

→ Teleskop s ohniskom **750 mm (f/5)** je **svetelnejší a vhodnejší** na fotografovanie objektov s nízkou jasnosťou.

Príklad 6: Rozlišovanie dvojhviezd

Zadanie:

Ďalekohľad s priemerom 120 mm má teoretickú rozlišovaciu schopnosť 1". Dvojhviezda má uhlovú vzdialenosť 0,8".

Je možné tieto hviezdy rozlíšiť?

Riešenie:

Rozlišovacia schopnosť 1" znamená, že objekty bližšie ako 1" sa javia ako spojené. 0,8" je pod týmto limitom → vizuálne ich nerozoznáme ako dve samostatné.

Výsledok:

→ Nie, hviezdy sa spoja do jedného obrazu – nie je možné ich rozlíšiť.

2.4 Odhady jasnosti, pozorovanie objektov

Príklad 1: Porovnanie jasnosti dvoch hviezd

Zadanie:

Hviezda A má magnitúdu 2,0 a hviezda B magnitúdu 4,5. Ktorá hviezda je jasnejšia a koľkokrát?

Riešenie:

Rozdiel magnitúd je:

$$\Delta m = 4,5 - 2,0 = 2,5$$

Jasnosť sa mení podľa vzťahu:

$$\frac{I_A}{I_B} = 10^{0,4 \cdot \Delta m} = 10^1 = 10$$

Hviezda A je teda 10× jasnejšia než B.

Výsledok:

→ Hviezda A je 10× jasnejšia než hviezda B.

Príklad 2: Odhad jasnosti premennej hviezdy

Zadanie:

Premenná hviezda sa nachádza medzi dvoma referenčnými hviezdami: jedna má magnitúdu 5,0 a druhá 5,8. Premenná sa zdá byť o niečo jasnejšia ako 5,8, ale nie tak jasná ako 5,0. Odhadni magnitúdu premennej hviezdy.

Riešenie:

Ak je premenná medzi 5,0 a 5,8, ale bližšie k 5,8, môžeme odhadnúť hodnotu napr. 5,6 – závisí od subjektívneho hodnotenia.

Typickým spôsobom je interpolácia:

$$m \approx 5,6$$

Výsledok:

➡ Odhadovaná jasnosť premennej hviezdy je **približne 5,6 mag.**

Príklad 3: Pozorovanie Mesiaca a jeho detailov**Zadanie:**

Pri pozorovaní Mesiaca si všimneš výrazný kráter pri terminátore. Ako by si pri kreslení postupoval, aby si zachytil čo najvernejšie detaily?

Uved' aspoň 3 zásady astronomického kreslenia.

Riešenie:

1. **Zacieliť sa na kontrastné prvky** – tieňové hrany, osvetlené krátery.
2. **Používať mäkkú ceruzku (napr. B2-B4)** na tieňovanie.
3. **Začať náčrtom obrysov, potom doplniť detaily.**
4. **Zaznamenať čas a fázu Mesiaca.**

Výsledok:

➡ Pri kresbe sa postupuje **od základného obrysu k tieňovaniu, dôležitá je presnosť a kontrastné zachytenie.**

Príklad 4: Vizuálne zmeny premenných hviezd**Zadanie:**

Pri pozorovaní premenných hviezd zaznamenáš nasledovné jasnosti počas 5 nocí: 5,8 – 5,6 – 5,4 – 5,3 – 5,2.

Čo to hovorí o fáze premennej hviezdy a aký typ premennej by mohla byť?

Riešenie:

Hviezda zjavne zosvetľuje → nachádza sa v stúpajúcej fáze.

Tento pomalý a pravidelný nárast môže naznačovať typ ako **Mira Ceti** alebo **Delta Cephei**, závisí od ďalších parametrov (perióda, amplitúda).

Zaznamenávanie takéhoto vývoja je základom vizuálnej fotometrie.

Výsledok:

➡ Hviezda je **vo fáze zosvetľovania**, možno ide o **pulzujúcu premennú**.

Príklad 5: Porovnanie pozorovaní s CCD a okom**Zadanie:**

Vizuálny pozorovateľ odhadol jasnosť premennej hviezdy na 6,4 mag. CCD meranie ukázalo hodnotu 6,1 mag.

Prečo sa môžu tieto hodnoty líšiť?

Riešenie:

Dôvody rozdielu:

- Ľudské oko má subjektívne vnímanie jasnosti.

- Vizualne pozorovanie je ovplyvnené priehľadnosťou atmosféry, únavou oka, okolitými hviezdami.
- CCD detektor má lineárnu odozvu, menšiu chybu.

Rozdiel 0,3 mag je bežný a neznamená chybu pozorovateľa.

Výsledok:

→ Rozdiel je spôsobený **subjektivitou vizuálneho pozorovania vs. objektívnosťou CCD merania**.

Príklad 6: Skreslenie pri pozorovaní difúzných objektov

Zadanie:

Pozorovateľ sleduje hmlovinu M42. Na fotografii sú detaily, ktoré iný pozorovateľ rovnakým ďalekohľadom nezaznamenal.

Ako je možné, že dvaja pozorovatelia vidia odlišne?

Riešenie:

Rozdiel môže byť spôsobený:

- Rôznym **skúsenostiam** pozorovateľov (citlivosť na slabé detaily).
- Použitím rôzneho **filtra** (napr. UHC, OIII).
- **Zrakovým dojmom** – niektoré detaily vidno len s nepriamym pohľadom.
- Rozdielne **tmavá obloha** (miesto pozorovania).

Výsledok:

→ Odlišné vnímanie detailov je normálne – skúsenosť, zrak a podmienky zohrávajú veľkú úlohu.

2.5 Spektroskopia a fotometria (jednoduché aplikácie)

Príklad 1: Zmena jasnosti v rôznych filtroch

Zadanie:

Hviezda má jasnosť 6,0 mag vo filtre V a 6,8 mag vo filtre B.

Aký je farebný index (B–V) a čo to naznačuje o farbe hviezdy?

Riešenie:

Farebný index sa počíta ako:

$$B - V = 6,8 - 6,0 = 0,8$$

Farebný index > 0 znamená, že hviezda je červenšia (chladnejšia).

Výsledok:

→ Farebný index je 0,8 – hviezda je červenšia, patrí medzi chladnejšie.

Príklad 2: Spektrum hviezdy typu A

Zadanie:

Spektrum hviezdy typu A ukazuje silné absorpčné čiary vodíka (Balmerove). Čo to naznačuje o jej teplote a farbe?

Riešenie:

Silné Balmerove línie sú charakteristické pre hviezdy typu A (napr. Vega).

Tieto hviezdy majú:

- Teplotu $\sim 7500 - 10\,000\text{ K}$
- Farbu bielu až modrastú

Výsledok:

➡ Hviezda typu A má **teplotu okolo 9000 K, je bielo-modrá.**

Príklad 3: Určenie radiálnej rýchlosti zo spektra

Zadanie:

Spektrálna čiara $H\alpha$ (vlnová dĺžka 656,3 nm) je u hviezdy pozorovaná na 657,2 nm. Akou rýchlosťou sa hviezda približuje alebo vzdďľuje?

Riešenie:

Použijeme Dopplerov posun:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \Rightarrow v = c \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

$$\Delta\lambda = 657,2 - 656,3 = 0,9\text{ nm}$$

$$v = 3 \cdot 10^8 \cdot \frac{0,9}{656,3} \approx 4,12 \cdot 10^5\text{ m/s} = 412\text{ km/s}$$

Posun je do červena $\rightarrow$ hviezda sa vzdďľuje.

Výsledok:

➡ Hviezda sa **vzdďľuje rýchlosťou približne 412 km/s.**

Príklad 4: Porovnanie jasností dvoch hviezd cez filtre

Zadanie:

Hviezda X má v systéme UBV nasledujúce hodnoty:

$$U = 5,5; B = 5,7; V = 6,1$$

Ktorá z dvojice hviezd X a Y je modrejšia, ak hviezda Y má $B-V = 1,2$?

Riešenie:

Pre hviezdu X:

$$B - V = 5,7 - 6,1 = -0,4$$

Negatívny index znamená **veľmi modrú hviezdu.**

Hodnota pre hviezdu Y je 1,2 → veľmi červená hviezda.

Výsledok:

→ Hviezda X je výrazne modrejšia ako Y.

Príklad 5: Odhad teploty hviezdy z farebného indexu

Zadanie:

Hviezda má farebný index $B-V = 0,0$. Odhadni jej povrchovú teplotu.

Riešenie:

Empirický vzťah (približný):

$$\log T \approx 3,960 - 0,290 \cdot (B - V)$$

$$\log T \approx 3,960 - 0,290 \cdot 0,0 = 3,960 \Rightarrow T \approx 10^{3,960} \approx 9120 \text{ K}$$

Teplota zodpovedá hviezde typu A0 – biela hviezda.

Výsledok:

→ Teplota hviezdy je približne 9120 K.

Príklad 6: Kalibrácia fotometrie

Zadanie:

Pri fotometrickom pozorovaní objektu bola zaznamenaná hodnota jasnosti 14,2 mag.

Kalibračná hviezda s rovnakým filtrom má známu jasnosť 12,0 mag a bola zaznamenaná s 10× vyšším signálom než cieľový objekt.

Je táto kalibrácia správna?

Riešenie:

Rozdiel jasností podľa signálu:

$$\Delta m = -2,5 \log \left(\frac{I_{\text{obj}}}{I_{\text{kal}}} \right) = -2,5 \log \left(\frac{1}{10} \right) = 2,5$$

Objekt je o 2,5 mag slabší →

$$12,0 + 2,5 = 14,5$$

Ale meraná hodnota bola 14,2 → rozdiel 0,3 mag.

Výsledok:

→ Meranie je blízke správnej hodnote, no mierne podhodnotené (0,3 mag rozdiel).

3 Paralaxa a určovanie vzdialeností

3.1 Teoretický úvod

Ročná paralaxa

- Ročná paralaxa (π) je **zdanlivý posun hviezd** na oblohe spôsobený pohybom Zeme okolo Slnka.
- Meria sa v **oblúkových sekundách (")**.
- Definícia:
Paralaxa $\pi = 1''$ zodpovedá vzdialenosti 1 parsek (pc).

Vzorec pre výpočet vzdialenosti (d):

$$d = \frac{1}{\pi} \quad (\text{pri } \pi \text{ v oblúkových sekundách, } d \text{ v parsekoch})$$

Trigonometrické a fotometrické určenie vzdialeností

- **Trigonometrické metódy:** vyžadujú presné meranie uhlov (napr. paralaxa), vhodné len pre blízke objekty (desiatky až stovky parsekov).
- **Fotometrická paralaxa:** určuje sa pomocou zdanlivej a absolútnej hviezdnej veľkosti.

Vzorec pre vzdialenostný modul ($m - M$):

$$m - M = 5 \log d - 5 \Rightarrow d = 10^{\frac{m-M+5}{5}} \quad (d \text{ v parsekoch})$$

- m : zdanlivá magnitúda
- M : absolútna magnitúda

Metódy pomocou štandardných sviec

Štandardná svieca = objekt s **známou absolútnou magnitúdou**, napr.:

- cefeidy (premenné hviezdy so vzťahom medzi periódou a svietivosťou),
- supernovy typu Ia,
- niektoré typy hviezdokôp.

Postup:

1. Zmeriame zdanlivú magnitúdu (m),
2. vieme M (zo vzťahu perióda–svietivosť alebo kalibrácie),
3. dopočítame vzdialenosť pomocou vzdialenostného modulu.

3.2 Ročná paralaxa

Príklad 1: Výpočet vzdialenosti z paralaxy

Zadanie:

Hviezda má ročnú paralaxu $0,2''$. Aká je jej vzdialenosť v parsekoch?

Riešenie:

Použijeme základný vzorec:

$$d = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ pc}$$

Výsledok:

→ Vzdialenosť hviezdy je **5 parsekov**.

Príklad 2: Ktorá hviezda je bližšie?

Zadanie:

Hviezda A má paralaxu $0,1''$, hviezda B má paralaxu $0,05''$.

Ktorá z nich je bližšie k Zemi?

Riešenie:

Čím väčšia paralaxa, tým menšia vzdialenosť.

- A: $d = 1/0,1 = 10 \text{ pc}$
- B: $d = 1/0,05 = 20 \text{ pc}$

Výsledok:

→ Hviezda A je bližšie k Zemi.

Príklad 3: Zmena paralaxy počas misie

Zadanie:

Kozmická sonda namerala paralaxu hviezdy ako $0,005''$, neskôr sa zistilo, že je to $0,004''$. Ako sa zmenil odhad vzdialenosti hviezdy?

Riešenie:

- Pôvodná vzdialenosť:

$$d_1 = 1/0,005 = 200 \text{ pc}$$

- Nová vzdialenosť:

$$d_2 = 1/0,004 = 250 \text{ pc}$$

Výsledok:

→ Odhad vzdialenosti sa **zvýšil zo 200 na 250 parsekov**.

Príklad 4: Prepočet na svetelné roky

Zadanie:

Hviezda má paralaxu $0,025''$. Urči jej vzdialenosť v svetelných rokoch.

(Vieš, že $1 \text{ parsek} \approx 3,26 \text{ ly}$)

Riešenie:

- Najprv vzdialenosť v pc:

$$d = 1/0,025 = 40 \text{ pc}$$

- Potom prepočet:

$$d = 40 \cdot 3,26 \approx 130,4 \text{ ly}$$

Výsledok:

➡ Vzdialenosť hviezdy je **približne 130 svetelných rokov**.

Príklad 5: Porovnanie presností

Zadanie:

Dve družice merajú paralaxy:

- GAIA: $\pi = 0,01234'' \pm 0,00002''$
- STAR-X: $\pi = 0,01230'' \pm 0,00015''$

Urči vzdialenosť a relatívnu chybu v % pre každú družicu.

Riešenie:

- GAIA:

$$d = 1/0,01234 \approx 81,01 \text{ pc} \quad \Delta d/d = \frac{0,00002}{0,01234} \approx 0,00162 = 0,162\%$$

- STAR-X:

$$d = 1/0,01230 \approx 81,30 \text{ pc} \quad \Delta d/d = \frac{0,00015}{0,01230} \approx 0,0122 = 1,22\%$$

Výsledok:

➡ GAIA má oveľa presnejšie meranie (0,16 % vs. 1,22 %).

Príklad 6: Určenie vzdialenosti pri malom posune

Zadanie:

Na dvoch snímkach od seba vzdialených 6 mesiacov sa zistil zdanlivý posun hviezdy o $0,1''$.

Aká je jej vzdialenosť?

Riešenie:

Ročná paralaxa = polovica zdanlivého posunu (lebo ide o výkyv medzi dvoma extrémnymi bodmi):

$$\pi = \frac{0,1}{2} = 0,05'' \Rightarrow d = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ pc}$$

Výsledok:

→ Vzdialenosť hviezdy je **20 parsekov**.

3.3 Trigonometrické a fotometrické určenie vzdialeností

Príklad 1: Výpočet vzdialenosti z modulu

Zadanie:

Zdanlivá hviezdna veľkosť hviezdy je **m = 10**, absolútna hviezdna veľkosť je **M = 5**.

V akej vzdialenosti sa hviezda nachádza?

Riešenie:

Použijeme vzťah:

$$m - M = 5 \log d - 5 \Rightarrow 10 - 5 = 5 \log d - 5 \Rightarrow 10 = 5 \log d \Rightarrow \log d = 2 \Rightarrow d = 10^2 = 100 \text{ pc}$$

Výsledok:

→ Hviezda sa nachádza vo vzdialenosti **100 parsekov**.

Príklad 2: Vzdialenostná stupnica

Zadanie:

Dve hviezdy majú rovnakú absolútnu magnitúdu **M = 4**. Jedna má zdanlivú magnitúdu **m = 6**, druhá **m = 9**.

Ktorá je ďalej a koľkokrát?

Riešenie:

Použijeme rozdiel modulov:

- pre $m = 6$: $d_1 = 10^{(6-4+5)/5} = 10^{1,4} \approx 25,12 \text{ pc}$
- pre $m = 9$: $d_2 = 10^{(9-4+5)/5} = 10^2 = 100 \text{ pc}$

Pomer: $d_2/d_1 \approx 100/25,12 \approx 3,98$

Výsledok:

→ Druhá hviezda je približne **4-krát ďalej**.

Príklad 3: Reverzný výpočet

Zadanie:

Hviezda sa nachádza vo vzdialenosti **400 pc** a má zdanlivú magnitúdu **m = 12**.

Urč jej absolútnu magnitúdu M .

Riešenie:

Použijeme vzorec:

$$m - M = 5 \log d - 5 \Rightarrow 12 - M = 5 \log 400 - 5 \Rightarrow 12 - M = 5 \cdot \log(4 \cdot 10^2) - 5 \\ = 5(\log 4 + 2) - 5$$

$$\log 4 \approx 0,602 \Rightarrow 5(2,602) - 5 = 13,01 - 5 = 8,01 \Rightarrow M = 12 - 8,01 \approx 3,99$$

Výsledok:

➡ Absolútna magnitúda hviezdy je **približne 4**.

Príklad 4: Fotometrická vzdialenosť k bielej hviezde

Zadanie:

Biela hviezda hlavnej postupnosti má absolútnu magnitúdu $M = 2,2$. Ak jej zdanlivá magnitúda je 8,7, urč jej vzdialenosť.

Riešenie:

$$m - M = 8,7 - 2,2 = 6,5 \Rightarrow d = 10^{(6,5+5)/5} = 10^{2,3} \approx 199,5 \text{ pc}$$

Výsledok:

➡ Vzdialenosť hviezdy je **približne 200 parsekov**.

Príklad 5: Svetelné zoslabenie a modul vzdialenosti

Zadanie:

Hviezda má zdanlivú magnitúdu $m = 14$ a známu absolútnu magnitúdu $M = 4$, ale kvôli prachu pozorujeme zoslabenie 1,2 mag.

Aká je jej skutočná vzdialenosť?

Riešenie:

Korigujeme zdanlivú magnitúdu:

$$m_{\text{skutočná}} = 14 - 1,2 = 12,8$$

Použijeme vzorec:

$$m - M = 5 \log d - 5 \Rightarrow 12,8 - 4 = 5 \log d - 5 \Rightarrow 13,8 = 5 \log d \Rightarrow \log d = 2,76 \Rightarrow d \\ \approx 10^{2,76} \approx 575 \text{ pc}$$

Výsledok:

➡ Vzdialenosť hviezdy je **približne 575 parsekov**.

Príklad 6: Zdanlivá magnitúda cefeidy

Zadanie:

Premenná hviezda typu cefeida má absolútnu magnitúdu $M = -4,5$.

Nachádza sa vo vzdialenosti 1 kpc. Aká bude jej zdanlivá magnitúda?

Riešenie:

Použijeme vzorec:

$$m = M + 5\log d - 5 = -4,5 + 5\log 1000 - 5 = -4,5 + 5 \cdot 3 - 5 = -4,5 + 15 - 5 = 5,5$$

Výsledok:

→ Zdanlivá magnitúda **bude 5,5**.

3.4 Metódy pomocou štandardných sviec

Príklad 1: Cefeida ako štandardná svieca

Zadanie:

Cefeida má zdanlivú magnitúdu $m = 12$ a z tabuľky vieme, že jej absolútna magnitúda je $M = -3$.

V akej vzdialenosti sa nachádza?

Riešenie:

Použijeme klasický vzťah pre vzdialenostný modul:

$$\begin{aligned} m - M &= 5\log d - 5 \Rightarrow 12 - (-3) = 5\log d - 5 \Rightarrow 15 + 5 = 5\log d \Rightarrow \log d = 4 \Rightarrow d \\ &= 10^4 = 10\,000 \text{ pc} \end{aligned}$$

Výsledok:

→ Cefeida je vzdialená **10 000 parsekov**.

Príklad 2: Porovnanie dvoch supernov typu Ia

Zadanie:

Dve supernovy typu Ia mali zdanlivé magnitúdy $m_1 = 15$, $m_2 = 18$.

Určte, koľkokrát je druhá supernova ďalej ako prvá.

Riešenie:

Supernovy typu Ia majú rovnakú absolútnu magnitúdu, rozdiel jasností teda závisí len od vzdialeností.

Použijeme vzťah:

$$m_2 - m_1 = 5\log\left(\frac{d_2}{d_1}\right) \Rightarrow 3 = 5\log\left(\frac{d_2}{d_1}\right) \Rightarrow \log\left(\frac{d_2}{d_1}\right) = 0,6 \Rightarrow \frac{d_2}{d_1} = 10^{0,6} \approx 3,98$$

Výsledok:

→ Druhá supernova je **približne 4-krát ďalej**.

Príklad 3: Určenie vzdialenosti galaxie pomocou supernovy

Zadanie:

Supernova typu Ia v inej galaxii mala zdanlivú magnitúdu $m = 19,3$. Jej absolútna magnitúda je $M = -19,3$.

Urč vzdialenosť tejto galaxie.

Riešenie:

$$\begin{aligned} m - M &= 5 \log d - 5 \Rightarrow 19,3 - (-19,3) = 5 \log d - 5 \Rightarrow 38,6 + 5 = 5 \log d \Rightarrow \log d = \frac{43,6}{5} \\ &= 8,72 \Rightarrow d = 10^{8,72} \approx 5,25 \cdot 10^8 \text{ pc} \end{aligned}$$

Výsledok:

→ Galaxia je vzdialená **približne 525 miliónov parsekov**.

Príklad 4: Kalibrácia štandardnej sviece

Zadanie:

Hviezda s dobre známou paralaxou $p = 0,005''$ má zdanlivú magnitúdu $m = 9$.

Akú absolútnu magnitúdu by sme jej priradili ako štandardnej sviece?

Riešenie:

Najprv zistíme vzdialenostný modul:

$$d = 1/p = 1/0,005 = 200 \text{ pc}$$

$$\begin{aligned} m - M &= 5 \log d - 5 = 5 \log 200 - 5 = 5(\log 2 + \log 100) - 5 = 5(0,301 + 2) - 5 \\ &= 11,505 - 5 = 6,505 \Rightarrow M = m - 6,505 = 9 - 6,505 = 2,495 \end{aligned}$$

Výsledok:

→ Absolútna magnitúda hviezdy je **približne 2,5**.

Príklad 5: Spojenie fotometrickej a spektroskopickej metódy

Zadanie:

Spektrálna analýza hviezdy odhalí spektrálny typ a svietivosť zodpovedajúcu $M = 0\{, \}0$. Fotometricky bola zistená zdanlivá magnitúda $m = 17$.

Odhadni vzdialenosť hviezdy v kiloparsekoch.

Riešenie:

$$\begin{aligned} m - M &= 5 \log d - 5 \Rightarrow 17 - 0 = 5 \log d - 5 \Rightarrow 22 = 5 \log d \Rightarrow \log d = 4,4 \Rightarrow d = 10^{4,4} \\ &\approx 25119 \text{ pc} = 25,1 \text{ kpc} \end{aligned}$$

Výsledok:

→ Vzdialenosť je **približne 25 kpc**.

Príklad 6: Zosilnenie jasnosti a chyba pri určovaní vzdialenosti

Zadanie:

Supernova typu Ia bola zosilnená gravitačnou šošovkou, čo spôsobilo, že jej zdanlivá magnitúda bola o 1,5 mag nižšia, než by zodpovedalo jej skutočnej vzdialenosti. Aká chyba vznikne vo výpočte vzdialenosti?

Riešenie:

Zníženie magnitúdy znamená, že objekt sa javí jasnejší → predpokladaná vzdialenosť bude menšia.

Rozdiel v magnitúde:

$$\Delta m = -1,5 = 5 \log \left(\frac{d_{\text{falošná}}}{d_{\text{skutočná}}} \right) \Rightarrow \log \left(\frac{d_{\text{falošná}}}{d_{\text{skutočná}}} \right) = -0,3 \Rightarrow \frac{d_{\text{falošná}}}{d_{\text{skutočná}}} = 10^{-0,3} \approx 0,501$$

Výsledok:

 **Odhadnutá vzdialenosť bude asi 50 % skutočnej – teda polovičná.**

4 Základy mechaniky v astrofyzike

4.1 Teoretický úvod

Newtonov gravitačný zákon

Znenie zákona:

Každé dve telesá sa navzájom priťahujú gravitačnou silou, ktorá je priamo úmerná súčinu ich hmotností a nepriamo úmerná druhej mocnine ich vzdialenosti.

Vzorec:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

kde:

- F je gravitačná sila,
- $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$ je gravitačná konštanta,
- m_1, m_2 sú hmotnosti telies,
- r je vzdialenosť medzi stredmi telies.

Pohyb planét a družíc

Centripetálna (dostredivá) sila pri obehu: Ak teleso obieha okolo iného telesa po kružnici, je naň potrebná centripetálna sila:

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

Rovnováha gravitačnej a centripetálnej sily vedie k vzťahu pre obehovú rýchlosť:

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Doba obehu (T): Pre kruhový pohyb platí:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

Keplerove zákony

1. **Prvý zákon:** Dráha planéty je elipsa, v jednom z ohnísk je Slnko.
2. **Druhý zákon:** Spojnica planéty a Slnka opíše za rovnaký čas rovnakú plochu.
3. **Tretí zákon** (matematicky):

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{konštanta}$$

(pre telesá obiehajúce rovnaké centrálné teleso).

Ak je známa hmotnosť centrálného telesa:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

Úniková rýchlosť

Definícia: Minimálna rýchlosť potrebná na to, aby teleso uniklo z gravitačného poľa bez ďalšieho pohonu.

Vzorec:

$$v_{\text{unik}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Gravitačná potenciálna energia

Vzorec:

$$U = -G \frac{mM}{r}$$

Záporné znamienko znamená, že na odtrhnutie telesa zo systému je potrebná energia.

Dôležité poznámky:

- Vzťahy platia **pre bodové telesá** alebo **guľovo symetrické** telesá (napr. planéty, hviezdy).
- Vzdialenosť r je vždy meraná od **stredú hmotnosti** objektu.
- V príkladoch zanedbávame **odpor prostredia**, ak nie je výslovne uvedené inak.

4.2 Gravitačný zákon, obeh planét a družíc

Príklad 1: Gravitačná sila medzi Zemou a Mesiacom

Zadanie:

Vypočítaj gravitačnú silu medzi Zemou ($M_Z = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$) a Mesiacom ($M_M = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$), ak ich vzdialenosť je $r = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$.

Riešenie:

Použijeme Newtonov gravitačný zákon:

$$F = G \frac{M_Z \cdot M_M}{r^2}$$

Dosadíme:

$$F = 6,674 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,97 \cdot 10^{24} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{(3,84 \cdot 10^8)^2} \approx 1,98 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

Výsledok:

➡ Gravitačná sila medzi Zemou a Mesiacom je **približne $1,98 \cdot 10^{20} \text{ N}$** .

Príklad 2: Gravitačné zrýchlenie pri povrchu planéty

Zadanie:

Vypočítaj gravitačné zrýchlenie na povrchu planéty s hmotnosťou $6,0 \cdot 10^{23} \text{ kg}$ a polomerom $3,4 \cdot 10^6 \text{ m}$.

Riešenie:

Vzorec:

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

Dosadíme:

$$g = \frac{6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 6,0 \cdot 10^{23}}{(3,4 \cdot 10^6)^2} \approx 3,46 \text{ m/s}^2$$

Výsledok:

➡ Gravitačné zrýchlenie na povrchu planéty je približne **3,46 m/s²**.

Príklad 3: Rýchlosť družice na nízkej obežnej dráhe

Zadanie:

V akej výške nad Zemou musí obiehať družica, ak má rýchlosť $v = 7,8 \text{ km/s}$?
(Zem: $M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$)

Riešenie:

Vzorec:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \Rightarrow r = \frac{GM}{v^2}$$

Dosadíme:

$$r = \frac{6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(7,8 \cdot 10^3)^2} \approx 6,55 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Výška nad Zemou:

$$h = r - R = 6,55 \cdot 10^6 - 6,37 \cdot 10^6 = 1,8 \cdot 10^5 \text{ m}$$

Výsledok:

➡ Družica musí obiehať vo výške približne **180 km** nad povrchom Zeme.

Príklad 4: Doba obehu družice okolo planéty

Zadanie:

Družica obieha planétu vo výške 300 km. Polomer planéty je 6 000 km a hmotnosť $M = 4 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Urči dobu obehu.

Riešenie:

Celkový polomer:

$$r = 6,0 \cdot 10^6 + 3,0 \cdot 10^5 = 6,3 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Vzorec:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(6,3 \cdot 10^6)^3}{6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 10^{24}}} \approx 5,2 \cdot 10^3 \text{ s}$$

$$T \approx 87 \text{ min}$$

Výsledok:

→ Doba obehu družice je približne **87 minút**.

Príklad 5: Dvojhviezdny systém s rovnakou hmotnosťou

Zadanie:

Dve hviezdy s hmotnosťou $M = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ obiehajú po kružniciach, vzdialené 2 AU. Urč ich dobu obehu.

Riešenie:

Každá hviezda má vzdialenosť od ťažiska 1 AU = $1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(1,5 \cdot 10^{11})^3}{6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}} \approx 2,22 \cdot 10^7 \text{ s} \approx 0,7 \text{ rokov}$$

Výsledok:

→ Obehová doba hviezd v systéme je približne **0,7 roka**.

Príklad 6: Energia na opustenie gravitačného poľa Zeme

Zadanie:

Vypočítaj minimálnu energiu potrebnú na dopravenie 1000 kg telesa z povrchu Zeme do „nekonečna“.

Riešenie:

$$E = \frac{GMm}{R}$$

$$E = \frac{6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 1000}{6,37 \cdot 10^6} \approx 6,25 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Výsledok:

→ Potrebná energia je približne **$6,25 \cdot 10^{10} \text{ J}$** .

4.3 Keplerove zákony

Príklad 1: Obehová doba planéty voči Zemi

Zadanie:

Planéta má od Slnka vzdialenosť 4 AU. Urči jej obežnú dobu okolo Slnka v rokoch.

Riešenie:

Podľa 3. Keplerovho zákona platí:

$$T^2 = a^3 \Rightarrow T = \sqrt{a^3}$$

Pre $a = 4 \text{ AU}$:

$$T = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8 \text{ rokov}$$

Výsledok:

→ Obehová doba planéty je **8 rokov**.

Príklad 2: Pomerná doba obehu inej planéty

Zadanie:

Planéta má obežnú dobu 27 rokov. Aká je jej stredná vzdialenosť od Slnka v astronomických jednotkách?

Riešenie:

Opäť použijeme:

$$T^2 = a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{T^2}$$

$$a = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{729} = 9 \text{ AU}$$

Výsledok:

→ Stredná vzdialenosť planéty od Slnka je **9 AU**.

Príklad 3: Pomerná doba obehu dvoch planét

Zadanie:

Planéta A obieha Slnko vo vzdialenosti 2 AU, planéta B vo vzdialenosti 8 AU. Urči, koľkokrát je doba obehu planéty B dlhšia ako u planéty A.

Riešenie:

Z 3. Keplerovho zákona:

$$\left(\frac{T_B}{T_A}\right)^2 = \left(\frac{a_B}{a_A}\right)^3$$

$$\left(\frac{T_B}{T_A}\right)^2 = \left(\frac{8}{2}\right)^3 = 4^3 = 64 \Rightarrow \frac{T_B}{T_A} = \sqrt{64} = 8$$

Výsledok:

→ Planéta B má obežnú dobu **8× dlhšiu** ako planéta A.

Príklad 4: Porovnanie hmotnosti dvoch hviezd

Zadanie:

Dve planéty obieľajú dve rôzne hviezdy. Obeľná doba planéty A je 2 roky vo vzdialenosti 1 AU, planéty B je 2 roky vo vzdialenosti 2 AU. Ktorá hviezda je hmotnejšia a koľkokrát?

Riešenie:

Z obecného tvaru 3. Keplerovho zákona:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \Rightarrow M \propto \frac{a^3}{T^2}$$

Porovnáme pomer hmotností:

$$\frac{M_B}{M_A} = \frac{(2)^3/2^2}{(1)^3/2^2} = \frac{8}{1} = 8$$

Výsledok:

→ Hviezda B je **8× hmotnejšia** ako hviezda A.

Príklad 5: Obeľná doba exoplanéty okolo inej hviezdy

Zadanie:

Exoplanéta obieľá hviezdu s hmotnosťou $2 \cdot M_{\odot}$ vo vzdialenosti 1 AU. Aká je jej obeľná doba v rokoch?

Riešenie:

Použijeme zovšeobecnený tvar Keplerovho zákona:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

Alebo pre porovnanie s jednotkami:

$$T^2 = \frac{a^3}{M} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{1^3}{2}} = \sqrt{0,5} \approx 0,707 \text{ rokov}$$

Výsledok:

→ Obeľová doba exoplanéty je približne **0,71 roka**.

Príklad 6: Vzdialenosť hviezd v dvojhviezdnom systéme

Zadanie:

Dve hviezdy obieľajú okolo spoločného ťažiska s periódou 10 rokov. Ich celková hmotnosť je $4 \cdot M_{\odot}$. Urči ich strednú vzdialenosť v AU.

Riešenie:

Použijeme zovšeobecnený Keplerov zákon:

$$T^2 = \frac{a^3}{M} \Rightarrow a^3 = T^2 \cdot M = 10^2 \cdot 4 = 400 \Rightarrow a = \sqrt[3]{400} \approx 7,37 \text{ AU}$$

Výsledok:

→ Stredná vzdialenosť medzi hviezdami je približne **7,4 AU**.

4.4 Úniková rýchlosť, gravitačná potenciálna energia

Príklad 1: Úniková rýchlosť zo Zeme

Zadanie:

Urči únikovú rýchlosť pre objekt na povrchu Zeme. Hmotnosť Zeme je $M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, polomer Zeme $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$.

Riešenie:

Úniková rýchlosť:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Dosadenie:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6}} \approx 11186 \text{ m/s}$$

Výsledok:

→ Úniková rýchlosť zo Zeme je približne **11,2 km/s**.

Príklad 2: Potenciálna energia satelitu pri štarte

Zadanie:

Vypočítaj gravitačnú potenciálnu energiu satelitu s hmotnosťou 500 kg na povrchu Zeme.

Riešenie:

Vzorec pre gravitačnú potenciálnu energiu:

$$E_p = -\frac{GMm}{R}$$

Dosadenie:

$$E_p = -\frac{6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 500}{6,37 \cdot 10^6} \approx -3,13 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Výsledok:

→ Gravitačná potenciálna energia satelitu na povrchu Zeme je **približne $-3,13 \cdot 10^{10} \text{ J}$** .

Príklad 3: Porovnanie únikových rýchlostí Zeme a Mesiaca

Zadanie:

Porovnaj únikovú rýchlosť zo Zeme a z Mesiaca. Hmotnosť Mesiaca: $7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, polomer: $1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$. Výsledok uveď ako pomer $v_{\text{Zem}}/v_{\text{Mesiac}}$.

Riešenie:

Pre obe telesá platí:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \Rightarrow \frac{v_Z}{v_M} = \sqrt{\frac{M_Z R_M}{M_M R_Z}}$$

Dosadenie:

$$\frac{v_Z}{v_M} = \sqrt{\frac{5,97 \cdot 10^{24} \cdot 1,74 \cdot 10^6}{7,35 \cdot 10^{22} \cdot 6,37 \cdot 10^6}} \approx \sqrt{23,78} \approx 4,88$$

Výsledok:

➡ Úniková rýchlosť zo Zeme je približne **4,9× väčšia** ako z Mesiaca.

Príklad 4: Minimálna rýchlosť pre únik zo vzdialenosti 2 polomery Zeme

Zadanie:

Aká je úniková rýchlosť pre objekt, ktorý sa nachádza vo vzdialenosti $2R_Z$ od stredu Zeme (teda $1R_Z$ nad povrchom)?

Riešenie:

Použijeme:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}, \quad r = 2R$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{2R}} = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}, \quad \text{kde } v_0 \text{ je úniková rýchlosť z povrchu}$$

$$v \approx \frac{11186}{\sqrt{2}} \approx 7913 \text{ m/s}$$

Výsledok:

➡ Úniková rýchlosť z výšky 1 polomeru Zeme nad povrchom je približne **7,9 km/s**.

Príklad 5: Minimálna energia pre únik zo Slnčnej sústavy

Zadanie:

Vypočítaj minimálnu celkovú energiu (súčet kinetickej a potenciálnej) potrebnú na únik telesa s hmotnosťou 1000 kg zo Slnčnej sústavy zo vzdialenosti 1 AU od Slnka.

Hmotnosť Slnka: $M = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $R = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Riešenie:

Celková energia pre únik:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

Pri únikovej rýchlosti je $E = 0$, teda minimálna energia je nulová. Ale pre výpočet kinetickej a potenciálnej energie jednotlivo:

Potenciálna:

$$E_p = -\frac{GMm}{r} \approx -\frac{6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \cdot 1000}{1,496 \cdot 10^{11}} \approx -8,87 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Kinetická:

$$E_k = +\frac{1}{2}mv^2 = +8,87 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Výsledok:

➡ Minimálna celková energia potrebná na únik zo Slnecnej sústavy z 1 AU je **0 J**, no kinetická energia **musí byť** $+8,87 \cdot 10^{10} \text{ J}$.

Príklad 6: Gravitačná väzba dvojhviezdy

Zadanie:

Dve hviezdy tvoria dvojhviezdny systém. Majú hmotnosti $2M_{\odot}$ a $3M_{\odot}$, ich vzdialenosť je 10 AU. Urči celkovú gravitačnú potenciálnu energiu systému.

Riešenie:

Vzorec:

$$E_p = -\frac{GM_1M_2}{r}$$

Dosadenie:

$$E_p = -\frac{6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \cdot 3 \cdot 1,989 \cdot 10^{30}}{10 \cdot 1,496 \cdot 10^{11}} \approx -5,28 \cdot 10^{40} \text{ J}$$

Výsledok:

➡ Gravitačná potenciálna energia dvojhviezdného systému je **približne** $-5,28 \cdot 10^{40} \text{ J}$.

5 Svetlo a elektromagnetické žiarenie

5.1 Teoretický úvod

Svetlo (resp. elektromagnetické žiarenie) nesie informácie o zložení, teplote, pohybe či vzdialenosti objektov vo vesmíre. Základom sú jeho spektrálne vlastnosti, zákony žiarenia a spôsob, akým svetlo interaguje s prostredím (napr. atmosférou).

Spektrum hviezd a zákony žiarenia

Elektromagnetické spektrum:

Svetlo je elektromagnetické žiarenie, ktoré sa šíri rýchlosťou svetla $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Spektrum zahŕňa žiarenie od gama lúčov po rádiové vlny. Viditeľná časť je v rozmedzí cca 400 – 700 nm.

Spektrum hviezd:

Spektrum hviezd vzniká ako spojité spektrum čierneho telesa, s absorpčnými čiarami, ktoré prezrádajú chemické zloženie atmosféry hviezd.

Wienov posunovací zákon:

Maximálna intenzita žiarenia závisí od teploty:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$$

kde

$\lambda_{\max}$ – vlnová dĺžka maximálneho vyžarovania [m]

T – teplota [K]

$$b = 2,897 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

Stefanov-Boltzmannov zákon:

Celkový vyžiarený výkon povrchu čierneho telesa:

$$P = \sigma T^4$$

kde

P – výkon na jednotku plochy [W/m²]

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

Hviezdne veľkosti

Zdanlivá hviezdna veľkosť (m):

Určuje jasnosť objektu tak, ako ju pozorujeme zo Zeme. Menšie číslo → jasnejšia hviezda.

Absolútna hviezdna veľkosť (M):

Jasnosť, ktorú by mala hviezda vo vzdialenosti 10 parsekov.

Vzťah medzi nimi:

$$m - M = 5 \log_{10}(d) - 5$$

kde d je vzdialenosť v parsekoch.

Prienik svetla cez atmosféru

Absorpcia:

Atmosféra pohlcuje niektoré zložky spektra (napr. UV, IR), čo obmedzuje pozorovanie zo Zeme. Pokles jasnosti objektu v dôsledku rozptylu a absorpcie pri prechode svetla atmosférou. Vyššia nadmorská výška a menší zenitový uhol znižujú absorpciu.

Scintilácia (blikotanie hviezd):

Je spôsobená turbulentnými zmenami hustoty vzduchu v atmosfére, ktoré ohýbajú svetlo.

5.2 Spektrum hviezd, Wienov zákon, Stefanov-Boltzmannov zákon

Príklad 1: Výpočet teploty hviezd zo spektra

Zadanie:

Hviezda vyžaruje najviac svetla pri vlnovej dĺžke $\lambda_{\max} = 500 \text{ nm}$. Urč teplotu jej povrchu.

Riešenie:

Použijeme Wienov zákon:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} \Rightarrow T = \frac{b}{\lambda_{\max}}$$
$$T = \frac{2,897 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}}{500 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 5794 \text{ K}$$

Výsledok:

→ Teplota hviezd je približne **5794 K**.

Príklad 2: Porovnanie jasností dvoch hviezd podľa teploty

Zadanie:

Dve hviezdy majú rovnaký polomer, ale jedna má teplotu 6000 K a druhá 3000 K. Koľkokrát je prvá hviezda jasnejšia ako druhá?

Riešenie:

Použijeme Stefanov-Boltzmannov zákon. Pomery jasností:

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = \left(\frac{6000}{3000}\right)^4 = 2^4 = 16$$

Výsledok:

→ Prvá hviezda je **16× jasnejšia** ako druhá.

Príklad 3: Určenie vyžiareného výkonu hviezd

Zadanie:

Povrchová teplota hviezd je 7500 K a jej polomer je $R = 1,2 \cdot R_{\odot}$. Urč celkový vyžiarený výkon.

(Uvažuj $R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$)

Riešenie:

Použijeme Stefanov-Boltzmannov zákon:

$$P = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Najprv dosadíme hodnoty:

$$R = 1,2 \cdot 6,96 \cdot 10^8 = 8,352 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$P = 4\pi(8,352 \cdot 10^8)^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (7500)^4$$

Výpočtom dostaneme:

$$P \approx 1,73 \cdot 10^{27} \text{ W}$$

Výsledok:

→ Vyžiarený výkon hviezdy je približne $1,73 \cdot 10^{27} \text{ W}$.

Príklad 4: Farba hviezdy podľa Wienovho zákona**Zadanie:**

Zistite, akú farbu by mala hviezda s teplotou 10 000 K.

Riešenie:

Použijeme Wienov zákon:

$$\lambda_{\max} = \frac{2,897 \cdot 10^{-3}}{10,000} = 2,897 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 289,7 \text{ nm}$$

289 nm spadá do **ultrafialovej oblasti**, takže najviac vyžaruje v UV. Viditeľné svetlo by však bolo **modrobielu**.

Výsledok:

→ Hviezda by mala **modrobielu** farbu.

Príklad 5: Zmena jasnosti pri ochladení hviezdy**Zadanie:**

Hviezda ochladne z 8000 K na 7000 K, pričom jej polomer sa nezmení. O koľko percent poklesne jej vyžiarený výkon?

Riešenie:

Opäť použijeme pomer výkonov:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{7000}{8000}\right)^4 = \left(\frac{7}{8}\right)^4 = \frac{2401}{4096} \approx 0,586$$

Zmena výkonu:

$$1 - 0,586 = 0,414 = 41,4\%$$

Výsledok:

→ Výkon poklesne o približne **41,4 %**.

Príklad 6: Porovnanie dvoch hviezd s rôznou teplotou a veľkosťou

Zadanie:

Hviezda A má teplotu 6000 K a polomer R . Hviezda B má teplotu 4000 K a polomer $2R$. Ktorá hviezda je jasnejšia a koľkokrát?

Riešenie:

Použijeme Stefanov-Boltzmannov zákon:

$$P_A = 4\pi R^2 \sigma (6000)^4 \quad P_B = 4\pi (2R)^2 \sigma (4000)^4 = 16\pi R^2 \sigma (4000)^4$$

Pomer:

$$\frac{P_B}{P_A} = \frac{16 \cdot (4000)^4}{(6000)^4} = 16 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^4 = 16 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 16 \cdot \frac{16}{81} = \frac{256}{81} \approx 3,16$$

Výsledok:

→ Hviezda **B** je asi **3,16× jasnejšia** ako hviezda A.

5.3 Absolútna a zdanlivá hviezdna veľkosť

Príklad 1: Vzťah medzi zdanlivou a absolútnou hviezdnu veľkosťou

Zadanie:

Hviezda má absolútnu hviezdnu veľkosť $M = 4$ a nachádza sa vo vzdialenosti 10 parsekov. Aká je jej zdanlivá hviezdna veľkosť?

Riešenie:

Použijeme vzorec pre vzťah medzi zdanlivou a absolútnou hviezdnu veľkosťou:

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10} \right)$$

Tu $d = 10 \text{ pc}$, takže:

$$m - 4 = 5 \log_{10}(1) = 0 \Rightarrow m = 4$$

Výsledok:

→ Zdanlivá hviezdna veľkosť hviezdy je **4 mag**.

Príklad 2: Určenie vzdialenosti zo zdanlivej a absolútnej magnitúdy

Zadanie:

Hviezda má zdanlivú hviezdnu veľkosť $m = 9$ a absolútnu $M = 4$. V akej vzdialenosti sa nachádza?

Riešenie:

$$\begin{aligned} m - M &= 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10} \right) \Rightarrow 9 - 4 = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10} \right) \Rightarrow \log_{10} \left(\frac{d}{10} \right) = 1 \Rightarrow \frac{d}{10} = 10 \Rightarrow d \\ &= 100 \text{ pc} \end{aligned}$$

Výsledok:

→ Hviezda je vo vzdialenosti **100 parsekov**.

Príklad 3: Porovnanie jasností dvoch hviezd podľa magnitúd

Zadanie:

Hviezda A má zdanlivú hviezdnu veľkosť $m_A = 1,0$ a hviezda B $m_B = 6,0$. Koľkokrát je hviezda A jasnejšia?

Riešenie:

Rozdiel jasností:

$$\frac{I_A}{I_B} = 10^{0,4(m_B - m_A)} = 10^{0,4 \cdot 5} = 10^2 = 100$$

Výsledok:

→ Hviezda A je **100× jasnejšia** ako hviezda B.

Príklad 4: Vzdialenosť hviezdy s použitím logaritmov

Zadanie:

Hviezda má zdanlivú veľkosť $m = 11$ a absolútnu veľkosť $M = 6$. V akej vzdialenosti sa nachádza?

Riešenie:

$$\begin{aligned} m - M &= 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10} \right) \Rightarrow 11 - 6 = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10} \right) \Rightarrow 5 = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10} \right) \Rightarrow \log_{10} \left(\frac{d}{10} \right) = 1 \\ &\Rightarrow \frac{d}{10} = 10 \Rightarrow d = 100 \text{ pc} \end{aligned}$$

Výsledok:

→ Hviezda je vo vzdialenosti **100 parsekov**.

Príklad 5: Kombinovaný jas dvoch hviezd

Zadanie:

Dve hviezdy majú zdanlivé veľkosti $m_1 = 3$ a $m_2 = 4$. Aká je zdanlivá veľkosť výsledného svetla, ak sú pozorované spolu?

Riešenie:

Prepočítame jednotlivé jasnosti:

$$\begin{aligned} I_1 &= 10^{-0,4 \cdot 3} = 10^{-1,2}, \quad I_2 = 10^{-0,4 \cdot 4} = 10^{-1,6} \\ I &= I_1 + I_2 = 10^{-1,2} + 10^{-1,6} \approx 0,0631 + 0,0251 = 0,0882 \end{aligned}$$

Prepočítame späť na magnitúdu:

$$m = -2,5 \log_{10}(0,0882) \approx 2,63$$

Výsledok:

→ Zdanlivá magnitúda kombinovaného svetla je približne **2,63 mag**.

Príklad 6: Absolútna magnitúda vzdialenej hviezdy

Zadanie:

Hviezda má zdanlivú veľkosť $m = 12$ a nachádza sa vo vzdialenosti 400 parsekov. Urči jej absolútnu veľkosť.

Riešenie:

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10} \right) \Rightarrow 12 - M = 5 \log_{10}(40) = 5 \cdot \log_{10}(40)$$

$$\log_{10}(40) \approx 1,602 \Rightarrow 12 - M = 5 \cdot 1,602 = 8,01 \Rightarrow M = 12 - 8,01 = 3,99$$

Výsledok:

➡ Absolútna hviezdna veľkosť hviezdy je približne **3,99 mag**.

5.4 Prienik svetla cez atmosféru – absorpcia, scintilácia

Príklad 1: Útlm svetla pri pozorovaní hviezdy pri horizonte

Zadanie:

Pri pozorovaní hviezdy tesne nad obzorom (výška $h = 5^\circ$) atmosféra zoslabí svetlo 5-krát viac ako pri zenite. O koľko magnitúd bude hviezda slabšia oproti pozorovaniu v zenite?

Riešenie:

Zoslabnutie jasnosti I sa prejaví zvýšením zdanlivej magnitúdy podľa:

$$\Delta m = -2,5 \log_{10} \left(\frac{I_{\text{po}}}{I_{\text{pred}}} \right) = -2,5 \log_{10} \left(\frac{1}{5} \right)$$

$$\Delta m = 2,5 \log_{10}(5) \approx 2,5 \cdot 0,699 = 1,75$$

Výsledok:

➡ Hviezda sa bude javiť o **1,75 mag slabšia** ako v zenite.

Príklad 2: Účinok atmosférickej absorpcie na jasnosť objektu

Zadanie:

Atmosférická absorpcia je približne 0,2 mag na vzdušnú masu. Urč jasnosť objektu pozorovaného pod uhlom, kde je vzdušná masa 2.

Riešenie:

Zmena jasnosti:

$$\Delta m = 0,2 \cdot 2 = 0,4$$

Výsledok:

➡ Objekt bude mať zdanlivú veľkosť o **0,4 mag väčšiu** (teda bude slabší).

Príklad 3: Výška objektu a zdanlivá magnitúda

Zadanie:

Hviezda má v zenite jasnosť 2,0 mag. Ak ju pozorujeme v mieste, kde je vzdušná masa 3 a atmosférická absorpcia je 0,25 mag na jednotku, akú zdanlivú magnitúdu uvidíme?

Riešenie:

$$\Delta m = 0,25 \cdot 3 = 0,75 \Rightarrow m = 2,0 + 0,75 = 2,75$$

Výsledok:

→ Hviezda sa bude javiť s jasnosťou **2,75 mag**.

Príklad 4: Rozdiel vo viditeľnosti objektu počas noci

Zadanie:

Objekt je počas noci pozorovaný najprv pri výške 30°, neskôr pri výške 60°. Vzdušné masy sú približne 2 a 1,15. Atmosférická extinkcia je 0,22 mag na jednotku. O koľko sa zlepši jasnosť?

Riešenie:

$$\Delta m = 0,22 \cdot (2 - 1,15) = 0,22 \cdot 0,85 = 0,187$$

Výsledok:

→ Objekt bude pri vyššej výške jasnejší približne o **0,19 mag**.

Príklad 5: Scintilácia a expozičný čas

Zadanie:

Kratší expozičný čas (napr. 0,1 s) spôsobuje vplyv scintilácie na fotometriu. Ako sa zmení presnosť fotometrického merania, ak predĺžime expozičný čas 10-násobne?

Riešenie:

Scintilácia sa správa ako šum, ktorý klesá s odmocninou z expozičného času:

$$\sigma_{\text{scint}} \propto \frac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} = \sqrt{\frac{1,0}{0,1}} = \sqrt{10} \approx 3,16$$

Výsledok:

→ Predĺžením expozície 10× sa **zniži vplyv scintilácie viac ako 3×**, čo zlepši presnosť merania.

Príklad 6: Výpočet vzdušnej masy zo zenitového uhla

Zadanie:

Hviezdu pozorujeme pri zenitovom uhle $z = 60^\circ$. Aká je vzdušná masa?

Riešenie:

Približný vzorec:

$$X \approx \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{0,5} = 2$$

Výsledok:

→ Vzdušná masa je približne **2**.

6 Hviezdy – vznik, vývoj a vlastnosti

6.1 Teoretický úvod

Hviezdy sú základné stavebné jednotky galaxií. Ich vlastnosti a vývoj závisia najmä od ich **hmotnosti**. Tá určuje ich **teplotu, svietivosť, veľkosť, dĺžku života a spôsob ich zániku**.

Hmotnosť, teplota, svietivosť, spektrálna klasifikácia

Hmotnosť M

Určuje vývoj a životnú dráhu hviezdy. Vyjadruje sa často v násobkoch hmotnosti Slnka $M_{\odot}$.

Teplota T

Určuje farbu hviezdy. Platí:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$$

kde $\lambda_{\max}$ je vlnová dĺžka maximálnej energie (Wienov zákon), $b \approx 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m.K}$.

Svietivosť L

Celkové množstvo energie, ktoré hviezda vyžiari za sekundu:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

kde R je polomer hviezdy, σ je Stefanova–Boltzmannova konštanta ($5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$).

Spektrálna klasifikácia

Určuje teplotu a typ hviezdy podľa spektrálnych línií. Základná rada tried: **O – B – A – F – G – K – M** (od najteplejších po najchladnejšie).

Približné teploty:

- O: $> 30\,000 \text{ K}$
- B: $10\,000\text{--}30\,000 \text{ K}$
- A: $7\,500\text{--}10\,000 \text{ K}$
- F: $6\,000\text{--}7\,500 \text{ K}$
- G: $5\,200\text{--}6\,000 \text{ K}$
- K: $3\,700\text{--}5\,200 \text{ K}$
- M: $< 3\,700 \text{ K}$

HR diagram (Hertzsprungov–Russellov diagram)

- Graf, kde os x predstavuje teplotu (zvyčajne klesajúcu sprava doľava), os y svietivosť (v násobkoch svietivosti Slnka).
- Hlavná postupnosť – väčšina hviezd počas aktívneho spaľovania vodíka.
- Nad ňou: obri a nadobri.
- Pod ňou: bieli trpaslíci.

Životné cykly hviezd

Nízko- až strednehmotné hviezdy (ako Slnko):

Protohviezda → hlavná postupnosť → červený obor → planetárna hmlovina → biely trpaslík

Hmotné hviezdy:

Protohviezda → hlavná postupnosť → červený nadobor → supernova → neutrónová hviezda / čierna diera

Dĺžka života hviezdy nepriamo závisí od jej hmotnosti:

$$t \sim \frac{1}{M^{2,5}}$$

Konečné štádiá hviezd

Biely trpaslík – zvyšok po menej hmotných hviezdach ($< 8 M_{\odot}$), nemá termojadrové reakcie, chladne.

Neutrónová hviezda – extrémne hustý pozostatok po supernove, hlavne z neutrónov.

Čierna diera – objekt s takou gravitačnou silou, že nič, ani svetlo, nemôže uniknúť.

6.2 Hmotnosť, teplota, svietivosť, spektrálna klasifikácia

Príklad 1: Teplota hviezdy podľa farby

Zadanie:

Hviezda vyžaruje najviac energie pri vlnovej dĺžke 480 nm. Urč, akú má približne povrchovú teplotu.

Riešenie:

Použijeme **Wienov zákon**:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} \Rightarrow T = \frac{b}{\lambda_{\max}}$$

kde $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}$,

$$\lambda_{\max} = 480 \text{ nm} = 4,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

$$T = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{4,8 \cdot 10^{-7}} \approx 6040 \text{ K}$$

Výsledok:

→ Povrchová teplota hviezdy je približne **6040 K**.

Príklad 2: Spektrálna trieda Slnka

Zadanie:

Slnko má povrchovú teplotu približne 5770 K. Do akej spektrálnej triedy patrí?

Riešenie:

Porovnáme s typickými rozsahmi spektrálnych tried:

5770 K patrí do triedy **G** (približne 5200–6000 K), konkrétne do podtriedy **G2**.

Výsledok:

→ Slnko patrí do **spektrálnej triedy G2**.

Príklad 3: Výpočet svietivosti hviezdy

Zadanie:

Hviezda má polomer $R = 2R_{\odot}$ a povrchovú teplotu $T = 7000$ K. Urč jej svietivosť v násobkoch svietivosti Slnka.

Riešenie:

Pomocou Stefanovho–Boltzmannovho zákona:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \Rightarrow \frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4$$
$$\frac{L}{L_{\odot}} = (2)^2 \cdot \left(\frac{7000}{5770}\right)^4 \approx 4 \cdot (1,213)^4 \approx 4 \cdot 2,17 = 8,68$$

Výsledok:

→ Svietivosť hviezdy je približne **8,7-násobkom svietivosti Slnka**.

Príklad 4: Teplota hviezdy z jej svietivosti a polomeru

Zadanie:

Hviezda má svietivosť $L = 10L_{\odot}$ a polomer $R = 1,5R_{\odot}$. Urč jej povrchovú teplotu.

Riešenie:

Použijeme upravený Stefanov–Boltzmannov zákon:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4 \Rightarrow \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4 = \frac{L/L_{\odot}}{(R/R_{\odot})^2} = \frac{10}{(1,5)^2} = \frac{10}{2,25} \approx 4,44$$
$$\frac{T}{T_{\odot}} = \sqrt[4]{4,44} \approx 1,45 \Rightarrow T \approx 1,45 \cdot 5770 \text{ K} \approx 8370 \text{ K}$$

Výsledok:

→ Povrchová teplota hviezdy je približne **8370 K**.

Príklad 5: Odvodzovanie trvania života hviezdy

Zadanie:

Hviezda má 3-násobnú hmotnosť Slnka. Aký bude jej odhadovaný život v porovnaní so Slnkom?

Riešenie:

Použijeme vzťah:

$$t \sim \frac{1}{M^{2,5}} \Rightarrow \frac{t}{t_{\odot}} = \left(\frac{1}{3^{2,5}}\right) \approx \frac{1}{15,6} \approx 0,064$$

Výsledok:

→ Život hviezdy bude približne **6,4 % dĺžky života Slnka**, teda asi **640 miliónov rokov**.

Príklad 6: Kombinácia údajov na určenie triedy hviezdy

Zadanie:

Hviezda má svietivosť $25 L_{\odot}$, povrchovú teplotu 9500 K a je vzdialená 50 parsekov. Urč jej spektrálnu triedu a či patrí do hlavnej postupnosti.

Riešenie:

- Teplota 9500 K zodpovedá spektrálnej triede A.
- Svietivosť $25 L_{\odot}$ je v rozsahu hviezd hlavnej postupnosti triedy A.
- Nejde o obrov ani trpaslíkov (svietivosť by bola podstatne vyššia/nížšia).

Výsledok:

➡ Hviezda patrí do **spektrálnej triedy A** a je na **hlavnej postupnosti**.

6.3 Hertzsprungov-Russellov (HR) diagram

Príklad 1: Poloha Slnka v HR diagrame

Zadanie:

Kde sa nachádza Slnko na HR diagrame?

Riešenie:

Slnko má:

- povrchovú teplotu približne 5770 K
- svietivosť $1 L_{\odot}$

Teda je v strede hlavnej postupnosti.

Výsledok:

➡ Slnko je na **hlavnej postupnosti v strede HR diagramu**.

Príklad 2: Určenie polohy modrej hviezdy

Zadanie:

Hviezda má teplotu 20 000 K a veľmi vysokú svietivosť. Do ktorej časti HR diagramu ju zaradíme?

Riešenie:

Vysoká teplota a vysoká svietivosť znamenajú, že ide o hviezdu v oblasti **modrých obrov**.

Výsledok:

➡ Hviezda patrí **medzi modrých obrov** na **hornej časti hlavnej postupnosti HR diagramu**.

Príklad 3: Porovnanie polôh hviezd

Zadanie:

Hviezda A má teplotu 6000 K a svietivosť $10 L_{\odot}$.

Hviezda B má teplotu 3000 K a svietivosť $0,01 L_{\odot}$.

Porovnaj ich polohy v HR diagrame.

Riešenie:

- Hviezda A: vyššia svietivosť, teplota ako Slnko → buď nad hlavnou postupnosťou alebo mladá masívna hviezda.
- Hviezda B: nízka teplota a veľmi malá svietivosť → **červený trpaslík** v dolnej časti hlavnej postupnosti.

Výsledok:

→ Hviezda A je vyššie na hlavnej postupnosti, hviezda B je červený trpaslík v dolnej časti HR diagramu.

Príklad 4: Odvodenie vývojového štádia

Zadanie:

Hviezda sa nachádza v HR diagrame v oblasti červených obrov. Čo to znamená o jej vývojovej fáze?

Riešenie:

Červený obor znamená, že hviezda už opustila hlavnú postupnosť – vyčerpala vodík v jadre a prebiehajú fúzie ťažších prvkov v obaloch.

Výsledok:

→ Hviezda je v pokročilom štádiu vývoja, v štádiu červeného obra.

Príklad 5: Výpočet svietivosti a poloha

Zadanie:

Hviezda má polomer $10 R_{\odot}$ a povrchovú teplotu 4000 K. Urč jej svietivosť voči Slnku a umiestni ju na HR diagrame.

Riešenie:

Použijeme Stefanov–Boltzmannov zákon:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4$$

kde $T_{\odot} = 5770$ K.

$$\frac{L}{L_{\odot}} = (10)^2 \left(\frac{4000}{5770}\right)^4 = 100 \times (0,693)^4 = 100 \times 0,231 = 23,1$$

Teplota 4000 K → nižšia teplota → červená farba.

Výsledok:

→ Hviezda má svietivosť približne $23 L_{\odot}$ a patrí medzi červených obrov.

Príklad 6: Kreslenie evolučnej dráhy hviezdy

Zadanie:

Nakresli dráhu 2-násobne hmotnejšej hviezdy ako Slnko na HR diagrame od hlavnej postupnosti po červeného obra.

Riešenie:

- Na hlavnej postupnosti sa nachádza vyššie a viac vľavo (vyššia teplota a svietivosť).
- Po vyčerpaní vodíka stúpa svietivosť a klesá teplota → hviezda sa pohybuje smerom doprava a nahor do oblasti červených obrov.

Výsledok:

→ Dráha je zo strednej hlavnej postupnosti **smerom nahor a doprava** na HR diagrame (k červeným obrom).

6.4 Životné cykly hviezd

Príklad 1: Vývoj hviezdy ako Slnko

Zadanie:

Opíš základné štádiá vývoja hviezdy s hmotnosťou ako Slnko.

Riešenie:

1. Gravitačný kolaps prachovo-plynového mračna → vznik protosluka.
2. Stabilizácia – hviezda na hlavnej postupnosti (vodíková fúzia).
3. Vyčerpanie vodíka → expanzia do červeného obra.
4. Odvrhnutie vonkajších vrstiev → vznik planetárnej hmloviny.
5. Zvyšok jadra → biely trpaslík.

Výsledok:

→ Sekvencia: **protosluko** → **hlavná postupnosť** → **červený obor** → **planetárna hmlovina** → **biely trpaslík**.

Príklad 2: Čo sa stane s hviezdou väčšou než Slnko?

Zadanie:

Čo sa stane s hviezdou, ktorá je približne 10-krát hmotnejšia než Slnko?

Riešenie:

- Kratšia životnosť na hlavnej postupnosti.
- Po vyčerpaní paliva prebehne kolaps → supernova typu II.
- Výsledkom môže byť neutrónová hviezda alebo čierna diera (závisí od hmotnosti jadra).

Výsledok:

→ Hviezda **exploduje ako supernova a vytvorí neutrónovú hviezdu alebo čiernu dieru**.

Príklad 3: Porovnanie dĺžky života hviezd

Zadanie:

Prečo žijú hmotné hviezdy kratšie ako málo hmotné hviezdy?

Riešenie:

- Hmotnejšie hviezdy majú vyššiu teplotu v jadre $\rightarrow$ rýchlejšia fúzia.
- Vyššie tempo spotreby paliva $\rightarrow$ kratšia životnosť.
- Málo hmotné hviezdy spaľujú vodík pomalšie $\rightarrow$ dlhý život.

Výsledok:

 Hmotnejšie hviezdy žijú kratšie, **pretože rýchlejšie spotrebujú svoje palivo.**

Príklad 4: Štádiá masívnej hviezdy pred supernovou

Zadanie:

Aké hlavné fúzne procesy prebiehajú v masívnej hviezde pred supernovou?

Riešenie:

- Najprv fúzia vodíka na hélium (hlavná postupnosť).
- Potom hélium $\rightarrow$ uhlík a kyslík.
- Nasledujúce štádiá: fúzia uhlíka, neónu, kyslíka, kremíka.
- Vzniká železné jadro $\rightarrow$ neprebíha fúzia $\rightarrow$ kolaps.

Výsledok:

 Masívna hviezda fúzuje **postupne ťažšie prvky až po železo predtým, než skolabuje.**

Príklad 5: Odhad životnosti hviezdy

Zadanie:

Hviezda má 3-násobok hmotnosti Slnka. Aká je približná dĺžka jej života v porovnaní so Slnkom (životnosť Slnka = 10 miliárd rokov)?

Riešenie:

Približne platí, že životnosť hviezdy je nepriamo úmerná tretej mocnine hmotnosti:

$$t \sim \frac{1}{M^3}$$

Pre $3 M_{\odot}$:

$$t = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

Teda:

$$10 \text{ mld. rokov} \times \frac{1}{27} \approx 0,37 \text{ mld. rokov}$$

Výsledok:

→ Hviezda s 3-násobnou hmotnosťou Slnka bude žiť **približne 370 miliónov rokov**.

Príklad 6: Vývojové stavy veľmi málo hmotných hviezd**Zadanie:**

Ako bude prebiehať vývoj hviezdy s veľmi nízkou hmotnosťou (napr. $0,2 M_{\odot}$)?

Riešenie:

- Veľmi pomalá spotreba vodíka → extrémne dlhý život (stovky miliárd rokov).
- Nestihne sa stať červeným obrom v bežnej dobe života vesmíru.
- Postupne vychladne a stane sa **čiernym trpaslíkom**.

Výsledok:

→ Veľmi málo hmotné hviezdy **budú pomaly vyhasínať a skončia ako čierni trpaslíci**.

6.5 Bieli trpaslíci, neutrónové hviezdy, čierne diery**Príklad 1: Vznik bieleho trpaslíka****Zadanie:**

Ako vznikne biely trpaslík?

Riešenie:

- Hviezda s malou alebo strednou hmotnosťou vyčerpá palivo.
- Prejde štádiom červeného obra.
- Odvrhne vonkajšie vrstvy → vznik planetárnej hmloviny.
- Zvyšné jadro → biely trpaslík.

Výsledok:

→ Biely trpaslík vzniká **ako zvyšok hviezdy po odvrhnutí vonkajších vrstiev**.

Príklad 2: Hustota neutrónovej hviezdy**Zadanie:**

Je neutrónová hviezda hustejšia ako biely trpaslík? Prečo?

Riešenie:

- Biely trpaslík je zložený hlavne z uhlíka a kyslíka, s hustotou okolo 10^6 g/cm^3 .
- Neutrónová hviezda je takmer úplne z neutrónov, s hustotou až 10^{14} g/cm^3 .
- Teda neutrónová hviezda je podstatne hustejšia.

Výsledok:

→ **Áno**, neutrónová hviezda je **mnohonásobne hustejšia** ako biely trpaslík.

Príklad 3: Podmienky vzniku neutrónovej hviezdy

Zadanie:

Za akých podmienok vznikne neutrónová hviezda namiesto bieleho trpaslíka?

Riešenie:

- Ak hmotnosť jadra po kolapse presiahne **Chandrasekharovu medzu** ($\sim 1,4 M_{\odot}$), biely trpaslík nemôže vzniknúť.
- Jadro skolabuje do neutrónovej hviezdy.
- Typicky po explózii supernovy typu II.

Výsledok:

➡ Neutrónová hviezda vznikne, ak zvyšné jadro hviezdy **má hmotnosť väčšiu ako 1,4-násobok hmotnosti Slnka**.

Príklad 4: Horizont udalostí čiernej diery

Zadanie:

Čo je horizont udalostí v kontexte čiernej diery?

Riešenie:

- Je to hranica, za ktorou gravitačná sila čiernej diery je taká veľká, že nič – ani svetlo – nemôže uniknúť späť.
- Definuje bod bez možnosti návratu.

Výsledok:

➡ Horizont udalostí **je hranica okolo čiernej diery, odkiaľ už nič nemôže uniknúť**.

Príklad 5: Výpočet Schwarzschildovho polomeru

Zadanie:

Vypočítaj Schwarzschildov polomer čiernej diery s hmotnosťou $10 M_{\odot}$.

(Použi: $r_s = \frac{2GM}{c^2}$, kde $G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, $M_{\odot} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$).

Riešenie:

Dosadíme:

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{2 \times 6,674 \times 10^{-11} \times 10 \times 2 \times 10^{30}}{(3 \times 10^8)^2} \\ r_s &= \frac{2,6696 \times 10^{21}}{9 \times 10^{16}} \\ r_s &\approx 29,66 \text{ km} \end{aligned}$$

Výsledok:

➡ Schwarzschildov polomer tejto čiernej diery **je približne 30 km**.

Príklad 6: Zotrvačná hmota pri vzniku čiernej diery

Zadanie:

Hviezda po supernove zanechá jadro s hmotnosťou $5 M_{\odot}$. Prečo sa nemôže stať neutrónovou hviezdou?

Riešenie:

- Neutrónové hviezdy majú maximálnu stabilnú hmotnosť približne $2 - 3 M_{\odot}$ (Tolman–Oppenheimer–Volkoffova medza).
- $5 M_{\odot}$ presahuje túto hodnotu.
- Jadrová degenerácia neutrónov nestačí zastaviť kolaps $\rightarrow$ vzniká čierna diera.

Výsledok:

 Hviezdne jadro s hmotnosťou $5 M_{\odot}$ **skolabuje do čiernej diery, pretože presahuje hmotnostný limit neutrónových hviezd.**

7 Exoplanéty a ich detekcia

7.1 Teoretický úvod

Čo sú exoplanéty?

- **Exoplanéty** (extrasolárne planéty) sú planéty obiehajúce iné hviezdy mimo našej Slnecnej sústavy.
- Objavujú sa v rôznych veľkostiach – od menších než Zem až po veľké plynné obry podobné Jupiteru.
- Ich štúdium je kľúčové pre pochopenie vzniku a vývoja planetárnych systémov, ako aj hľadanie života mimo Zeme.

Metódy detekcie exoplanét

1. Tranzitná metóda

- Sleduje pokles jasnosti hviezdy, keď planéta prejde (tranzituje) popred ňu.
- **Relatívny pokles jasnosti ΔF** je približne:

$$\Delta F = \left(\frac{R_p}{R_*}\right)^2$$

kde:

- R_p = polomer planéty,
- R_* = polomer hviezdy.
- Opakované tranzity umožňujú určiť **obehovú periódu** planéty.

2. Metóda radiálnych rýchlostí

- Meria zmeny **radiálnej rýchlosti** hviezdy spôsobené gravitačným ťahom planéty (dopplerovský efekt).
- Hviezda sa "kolíše" okolo ťažiska sústavy → spôsobuje malé zmeny v jej spektrálnych čiarach.

Maximálna radiálna rýchlosť hviezdy v_* sa dá odhadnúť z Newtonovej dynamiky:

$$v_* \approx \frac{M_p}{M_*} v_p$$

kde:

- M_p = hmotnosť planéty,
- M_* = hmotnosť hviezdy,
- v_p = obežná rýchlosť planéty.

Výpočty parametrov exoplanét

Z kombinácie tranzitnej metódy a radiálnej rýchlosti možno odhadnúť:

- **Polomer planéty** (z poklesu jasnosti),
- **Hmotnosť planéty** (z amplitúdy radiálnej rýchlosti),
- **Hustotu:**

$$\rho_p = \frac{3M_p}{4\pi R_p^3}$$

- **Veľkú poloos** (pri znalosti obežnej periódy a hviezdnej hmotnosti) pomocou **3. Keplerovho zákona**:

$$a^3 = \frac{GM_*}{4\pi^2} T^2$$

kde:

- a = veľká poloos,
- T = obežná doba.

Obývateľná zóna

- **Obývateľná zóna** je rozsah vzdialeností od hviezdy, kde by na povrchu planéty mohla existovať tekutá voda.
- Poloha obývateľnej zóny závisí hlavne od **svietivosti hviezdy**.

Približný odhad vzdialenosti obývateľnej zóny:

$$d \sim \sqrt{L_*}$$

kde:

- d = vzdialenosť v astronomických jednotkách (AU),
- L_* = svietivosť hviezdy (v jednotkách slnečnej svietivosti).

Výpočet polomeru obývateľnej zóny:

$$d = \sqrt{\frac{L_*}{L_\odot}} \cdot d_\odot$$

Kde:

- L_* je svietivosť hviezdy,
- $L_\odot$ je svietivosť Slnka,
- $d_\odot$ je referenčná vzdialenosť od Slnka (napr. 1 AU pre stred HZ).

Obývateľná zóna sa často udáva ako interval vzdialeností:

- **Vnútorý okraj:** $d_{\text{in}} = \sqrt{\frac{L_*}{L_{\odot}}} \cdot 0,95$
- **Vonkajší okraj:** $d_{\text{out}} = \sqrt{\frac{L_*}{L_{\odot}}} \cdot 1,37$

7.2 Tranzitná metóda, radiálna rýchlosť

Príklad 1: Tranzit a pokles jasnosti hviezdy

Zadanie:

Pri pozorovaní hviezdy s polomerom $R_* = 7 \times 10^8$ m bol zaznamenaný pokles jasnosti o 1 % počas tranzitu planéty. Určite približný polomer planéty.

Riešenie:

Tranzitná metóda predpokladá, že pokles jasnosti je daný:

$$\Delta F = \left(\frac{R_p}{R_*}\right)^2$$

Dosadíme $\Delta F = 0,01$:

$$0,01 = \left(\frac{R_p}{7 \times 10^8}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{0,01} = \frac{R_p}{7 \times 10^8} \Rightarrow R_p = 7 \times 10^8 \cdot 0,1 = 7 \times 10^7 \text{ m}$$

Výsledok:

➡ Polomer planéty je **približne 7×10^7 m** (čo zodpovedá veľkosti Jupitera).

Príklad 2: Obdobie tranzitu

Zadanie:

Planéta tranzituje pred hviezdou raz za 50 dní. Ako ďaleko (v AU) sa nachádza od svojej hviezdy, ak jej hmotnosť je porovnateľná so Slnkom?

Riešenie:

Použijeme 3. Keplerov zákon (v AU a rokoch):

$$a^3 = T^2$$

Pre $T = 50 \text{ dní} = \frac{50}{365,25} \approx 0,137$ rokov:

$$a^3 = (0,137)^2 \approx 0,0188 \Rightarrow a = \sqrt[3]{0,0188} \approx 0,27 \text{ AU}$$

Výsledok:

➡ Planéta sa nachádza **približne 0,27 AU** od hviezdy.

Príklad 3: Amplitúda radiálnej rýchlosti

Zadanie:

Hviezda podobná Slnku má planétu veľkosti Jupitera (hmotnosť $M_p = 1,9 \times 10^{27}$ kg) obiehajúcu vo vzdialenosti 0,05 AU. Odhadnite amplitúdu radiálnej rýchlosti hviezdy.

Riešenie:

Najprv určíme rýchlosť planéty (obežnú):

$$v_p = \sqrt{\frac{GM_*}{r}} \quad (\text{kde } M_* = 2 \times 10^{30} \text{ kg}, r = 0,05 \cdot 1,496 \times 10^{11} \text{ m})$$

$$r = 7,48 \times 10^9 \text{ m}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{6,674 \times 10^{-11} \cdot 2 \times 10^{30}}{7,48 \times 10^9}} \approx \sqrt{1,785 \times 10^{10}} \approx 1,34 \times 10^5 \text{ m/s}$$

Rýchlosť hviezdy:

$$v_* = \frac{M_p}{M_*} \cdot v_p = \frac{1,9 \times 10^{27}}{2 \times 10^{30}} \cdot 1,34 \times 10^5 \approx 127 \text{ m/s}$$

Výsledok:

➡ Amplitúda radiálnej rýchlosti hviezdy je **približne 127 m/s**.

Príklad 4: Hustota exoplanéty**Zadanie:**

Exoplanéta má polomer $R_p = 6 \times 10^7 \text{ m}$ a hmotnosť $M_p = 4 \times 10^{26} \text{ kg}$. Určite jej hustotu.

Riešenie:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3 \cdot 4 \times 10^{26}}{4\pi (6 \times 10^7)^3} = \frac{1,2 \times 10^{27}}{4\pi \cdot 2,16 \times 10^{23}} \approx \frac{1,2 \times 10^{27}}{2,71 \times 10^{24}} \approx 443 \text{ kg/m}^3$$

Výsledok:

➡ Hustota exoplanéty je **približne 443 kg/m³**.

Príklad 5: Trvanie tranzitu**Zadanie:**

Exoplanéta obieha svoju hviezdu (polomer $R_* = 7 \times 10^8 \text{ m}$) po kruhovej dráhe s polomerom $a = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$ a má obežnú dobu 365 dní. Ak sa pohybuje priamo popred stred hviezdy, aké je trvanie tranzitu?

Riešenie:

Rýchlosť planéty:

$$v = \frac{2\pi a}{T} = \frac{2\pi \cdot 1,5 \times 10^{11}}{365 \cdot 86400} \approx 29,8 \text{ km/s}$$

Trvanie prechodu cez disk hviezdy (približne):

$$t = \frac{2R_*}{v} = \frac{2 \cdot 7 \times 10^8}{2,98 \times 10^4} \approx 46980 \text{ s} \approx 13 \text{ hodín}$$

Výsledok:

➡ Tranzit trvá **približne 13 hodín**.

Príklad 6: Minimálna hmotnosť planéty z radiálnej rýchlosti

Zadanie:

Hviezda s hmotnosťou $M_* = 1 M_\odot$ má zaznamenanú zmenu radiálnej rýchlosti o 50 m/s v dôsledku planéty na obežnej dráhe s periódou 100 dní. Odhadnite minimálnu hmotnosť planéty (predpokladajte kruhovú dráhu, sklon 90°).

Riešenie:

Použijeme vzťah:

$$M_p \sin i = \frac{v_* M_*}{v_p}$$

Najprv určíme $v_p = \frac{2\pi a}{T}$, ale najskôr zistíme veľkú poloos a :

$$T = 100 \text{ dní} = 8,64 \times 10^6 \text{ s} \quad a^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2} \Rightarrow a \approx 6,29 \times 10^{10} \text{ m}$$

$$v_p = \frac{2\pi a}{T} \approx 45,8 \text{ km/s}$$

$$M_p = \frac{50 \cdot 2 \times 10^{30}}{4,58 \times 10^4} \approx 2,18 \times 10^{27} \text{ kg}$$

Výsledok:

➡ Minimálna hmotnosť planéty je **približne $2,18 \times 10^{27} \text{ kg}$** (podobná ako Jupiter).

7.3 Výpočty parametrov exoplanét

Príklad 1: Hustota exoplanéty

Zadanie:

Exoplanéta má polomer $R = 7 \times 10^7 \text{ m}$ a hmotnosť $M = 1,9 \times 10^{27} \text{ kg}$. Vypočítajte jej hustotu.

Riešenie:

Použijeme vzťah pre hustotu gule:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

Dosadíme:

$$\rho = \frac{3 \cdot 1,9 \times 10^{27}}{4\pi \cdot (7 \times 10^7)^3} = \frac{5,7 \times 10^{27}}{4\pi \cdot 3,43 \times 10^{23}} \approx \frac{5,7 \times 10^{27}}{4,3 \times 10^{24}} \approx 1325 \text{ kg/m}^3$$

Výsledok:

➡ Hustota planéty je **približne 1325 kg/m^3** , čo je podobné ako u Jupitera.

Príklad 2: Gravitácia na povrchu exoplanéty

Zadanie:

Určte gravitačné zrýchlenie na povrchu planéty s hmotnosťou $M = 5 \times 10^{25}$ kg a polomerom $R = 3 \times 10^6$ m.

Riešenie:

Vzorec pre gravitačné zrýchlenie:

$$g = \frac{GM}{R^2}$$
$$g = \frac{6,674 \times 10^{-11} \cdot 5 \times 10^{25}}{(3 \times 10^6)^2} = \frac{3,337 \times 10^{15}}{9 \times 10^{12}} \approx 370 \text{ m/s}^2$$

Výsledok:

→ Gravitačné zrýchlenie na povrchu planéty je **370 m/s²**.

Príklad 3: Dĺžka roka na exoplanéte

Zadanie:

Exoplanéta obieha hviezdu s hmotnosťou $M = 2 \cdot M_{\odot}$ vo vzdialenosti $a = 1,5$ AU. Určte dĺžku jej roku v dňoch.

Riešenie:

Použijeme upravený Keplerov 3. zákon:

$$T^2 = \frac{a^3}{M/M_{\odot}} = \frac{(1,5)^3}{2} = \frac{3,375}{2} = 1,6875 \Rightarrow T = \sqrt{1,6875} \approx 1,3 \text{ rokov}$$

Prevod na dni:

$$T \approx 1,3 \cdot 365,25 \approx 475 \text{ dní}$$

Výsledok:

→ Dĺžka roka na exoplanéte je **približne 475 dní**.

Príklad 4: Úniková rýchlosť z exoplanéty

Zadanie:

Vypočítajte únikovú rýchlosť z planéty s polomerom $R = 8 \times 10^6$ m a hmotnosťou $M = 6 \times 10^{24}$ kg.

Riešenie:

$$v'_{unik} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \cdot 6 \times 10^{24}}{8 \times 10^6}}$$
$$v'_{unik} = \sqrt{\frac{8,008 \times 10^{14}}{8 \times 10^6}} = \sqrt{1,001 \times 10^8} \approx 10000 \text{ m/s}$$

Výsledok:

→ Úniková rýchlosť z exoplanéty je približne 10000 m/s.

Príklad 5: Excentricita dráhy**Zadanie:**

Ak má exoplanéta perihélium $r_p = 0,5$ AU a afélium $r_a = 2$ AU, určte excentricitu jej dráhy.

Riešenie:

Použijeme vzťah:

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = \frac{2 - 0,5}{2 + 0,5} = \frac{1,5}{2,5} = 0,6$$

Výsledok:

→ Excentricita dráhy je 0,6.

Príklad 6: Povrchová teplota exoplanéty**Zadanie:**

Odhadnite povrchovú teplotu planéty vo vzdialenosti 0,2 AU od hviezdy podobnej Slnku, ak uvažujeme rovnováhu medzi absorbovaným a vyžiareným žiarením a albedo 0.

Riešenie:

Použijeme:

$$T = T_* \cdot \sqrt{\frac{R_*}{2a}} \quad (\text{pre albedo } 0)$$

Pre Slnko: $T_* = 5778$ K, $R_* = 6,96 \times 10^8$ m, $a = 0,2 \cdot 1,496 \times 10^{11}$

$$\begin{aligned} T &\approx 5778 \cdot \sqrt{\frac{6,96 \times 10^8}{2 \cdot 0,2 \cdot 1,496 \times 10^{11}}} = 5778 \cdot \sqrt{\frac{6,96 \times 10^8}{5,984 \times 10^{10}}} \approx 5778 \cdot \sqrt{0,0116} \\ &\approx 5778 \cdot 0,1075 \approx 621 \text{ K} \end{aligned}$$

Výsledok:

→ Odhadovaná povrchová teplota planéty je približne 621 K.

7.4 Obývateľné zóny**Príklad 1: Stred obývateľnej zóny****Zadanie:**

Hviezda má svietivosť $L = 0,25 \cdot L_\odot$. V akej vzdialenosti sa nachádza stred jej obývateľnej zóny?

Riešenie:

$$d = \sqrt{0,25} \cdot 1 = 0,5 \text{ AU}$$

Výsledok:

→ Stred obývateľnej zóny je vo vzdialenosti **0,5 AU**.

Príklad 2: Rozsah obývateľnej zóny**Zadanie:**

Hviezda má svietivosť $L = 1,5 \cdot L_{\odot}$. Určte približný rozsah obývateľnej zóny.

Riešenie:

$$d_{\text{in}} = \sqrt{1,5} \cdot 0,95 \approx 1,225 \cdot 0,95 \approx 1,16 \text{ AU}$$

$$d_{\text{out}} = \sqrt{1,5} \cdot 1,37 \approx 1,225 \cdot 1,37 \approx 1,68 \text{ AU}$$

Výsledok:

→ Obývateľná zóna sa nachádza **medzi 1,16 AU a 1,68 AU**.

Príklad 3: Zistenie polohy planéty v obývateľnej zóne**Zadanie:**

Planéta obieha hviezdu s $L = 0,5 \cdot L_{\odot}$ vo vzdialenosti 0,8 AU. Nachádza sa v obývateľnej zóne?

Riešenie:

Najprv spočítame hranice obývateľnej zóny:

$$\sqrt{0,5} \approx 0,707$$

$$d_{\text{in}} = 0,707 \cdot 0,95 \approx 0,672 \text{ AU}$$

$$d_{\text{out}} = 0,707 \cdot 1,37 \approx 0,97 \text{ AU}$$

Planéta je vo vzdialenosti 0,8 AU $\Rightarrow$ medzi hranicami.

Výsledok:

→ Planéta sa nachádza **v obývateľnej zóne** svojej hviezdy.

Príklad 4: Porovnanie dvoch hviezd**Zadanie:**

Hviezda A má $L = 1,0 \cdot L_{\odot}$, hviezda B má $L = 4 \cdot L_{\odot}$. O koľko ďalej je stred obývateľnej zóny u hviezdy B v porovnaní s A?

Riešenie:

Stred obývateľnej zóny je daný $d = \sqrt{L}$

$$d_A = \sqrt{1} = 1 \text{ AU}, \quad d_B = \sqrt{4} = 2 \text{ AU}$$

Výsledok:

→ Stred obývateľnej zóny u hviezdy B je **o 1 AU** ďalej ako u hviezdy A.

Príklad 5: Exoplanéta mimo obývateľnej zóny

Zadanie:

Planéta obieha hviezdu s $L = 3 \cdot L_{\odot}$ vo vzdialenosti 1,2 AU. Je v obývateľnej zóne?

Riešenie:

$$\sqrt{3} \approx 1,732$$

$$d_{\text{in}} = 1,732 \cdot 0,95 \approx 1,65 \text{ AU}, \quad d_{\text{out}} = 1,732 \cdot 1,37 \approx 2,37 \text{ AU}$$

$1,2 \text{ AU} < 1,65 \Rightarrow$ mimo obývateľnej zóny.

Výsledok:

→ Planéta sa nachádza **mimo obývateľnej zóny** – je príliš blízko k hviezde.

Príklad 6: Návrh obývateľnej zóny pre červeného trpaslíka

Zadanie:

Navrhnete rozsah obývateľnej zóny pre červeného trpaslíka s $L = 0,01 \cdot L_{\odot}$.

Riešenie:

$$\sqrt{0,01} = 0,1$$

$$d_{\text{in}} = 0,1 \cdot 0,95 = 0,095 \text{ AU}, \quad d_{\text{out}} = 0,1 \cdot 1,37 = 0,137 \text{ AU}$$

Výsledok:

→ Obývateľná zóna pre túto hviezdu sa nachádza **medzi 0,095 AU a 0,137 AU**.

8 Galaxie a štruktúra vesmíru

8.1 Teoretický úvod

Typy galaxií, ich zložky

Galaxia je obrovský gravitačne viazaný systém zložený z hviezd, hviezdokôp, medzihviezdneho plynu, prachu, temnej hmoty a ďalších objektov.

Hlavné typy galaxií podľa Hubblovej klasifikácie:

- **Špirálové galaxie (S, SB):** majú výrazné ramená a centrálnu výduť. SB označuje špirálovú galaxiu s priečkou (bar).
- **Eliptické galaxie (E):** guľové až pretiahnuté, bez výraznej štruktúry.
- **Nepriavidelné galaxie (Irr):** nemajú pravidelný tvar, často deformované zrážkami alebo gravitačnými interakciami.

Zložky galaxií:

- **Disk:** obsahuje ramená, mladé hviezdy, plyn a prach.
- **Bulge (výduť):** centrálna hustá oblasť so staršími hviezdami.
- **Halo:** riedke okolie obsahujúce guľové hviezdokopy a temnú hmotu.
- **Čierna diera:** v centrách mnohých galaxií sa nachádzajú supermasívne čierne diery.

Rotačné krivky galaxií, temná hmota

Rotačná krivka galaxie: vyjadruje závislosť obehovej rýchlosti hviezd od ich vzdialenosti od centra galaxie.

Podľa Newtonovej mechaniky by sa mala rýchlosť hviezd za hranicou hlavnej hmoty (disku) **zmenšovať** so vzdialenosťou. **Pozorovania však ukazujú, že ostáva takmer konštantná**, čo naznačuje prítomnosť **temnej hmoty** – neviditeľnej zložky, ktorá gravitačne pôsobí, ale nevyžaruje svetlo.

Temná hmota tvorí podľa odhadov až 85 % celkovej hmoty galaxií.

Hubblev zákon, rozpínanie vesmíru

Hubblev zákon: popisuje vzťah medzi rýchlosťou vzdľavovania galaxie a jej vzdialenosťou od nás:

$$v = H_0 \cdot d$$

Kde:

- v je rýchlosť vzdľavovania galaxie (určená z červeného posunu),
- d je vzdialenosť galaxie,
- H_0 je Hubbleva konštanta (približne 70 km/s/Mpc).

Z tohto zákona vyplýva, že **vesmír sa rozpína** – galaxie sa navzájom vzdďaľujú. Dôkazom je pozorovaný **červený posun** v spektre vzdďalených galaxií.

Rozpínanie vesmíru podporuje **Veľký tresk** ako model jeho vzniku a vývoja.

Vzťah medzi červeným posunom a Hubblovým zákonom

Pre malé hodnoty červeného posunu z , červený posun súvisí s rýchlosťou cez dopplerovský efekt:

$$z \approx \frac{v}{c} \Rightarrow v \approx z \cdot c$$

Pre väčšie hodnoty z už treba použiť kozmologické modely, ale pre naše príklady stačí aproximácia pre $z \ll 1$.

Vek vesmíru z Hubblovej konštanty

Ak sa vesmír rozpína rovnomerne, možno jeho vek približne odhadnúť ako:

$$t_0 \approx \frac{1}{H_0}$$

Kozmologický horizont: Je to najväčšia vzdialenosť, ktorú mohlo svetlo precestovať od vzniku vesmíru. Približne sa rovná:

$$d_{\text{horizont}} \approx c \cdot t_0$$

8.2 Typy galaxií, ich zložky

Príklad 1: Rozdelenie galaxií podľa tvaru

Zadanie:

Ktoré základné typy galaxií rozlišujeme podľa ich tvaru? Uveď ich názvy a stručnú charakteristiku.

Riešenie:

Základné typy galaxií:

- **Eliptické galaxie (E):** majú eliptický až sférický tvar, obsahujú najmä staré hviezdy, málo prachu a plynu, takmer žiadna tvorba nových hviezd.
- **Špirálové galaxie (S):** majú výrazný disk a ramená, kde sa tvoria nové hviezdy; často majú aj centrálnu výduť.
- **Špirálové s priečkou (SB):** podobné špirálovým, ale s centrálnou priečkou, z ktorej vychádzajú ramená.
- **Nepravidelné galaxie (Irr):** nemajú výrazný tvar, sú bohaté na plyn, prach a mladé hviezdy.

 **Výsledok:** Základné typy sú eliptické (E), špirálové (S), špirálové s tyčou (SB) a nepravidelné (Irr).

Príklad 2: Zložky špirálovej galaxie

Zadanie:

Vymenuj a krátko opíš tri hlavné zložky typickej špirálovej galaxie.

Riešenie:

1. **Disk:** obsahuje ramená s mladými hviezdami, plyn a prach.
2. **Výduť:** centrálna výduť s hustou koncentráciou starých hviezd.
3. **Halo:** riedke okolie galaxie s guľovými hviezdokopami a temnou hmotou, obsahuje najstaršie hviezdy.

➡ **Výsledok:** Zložky sú disk (mladé hviezdy), výduť (staré hviezdy), halo (guľové hviezdokopy, temná hmota).

Príklad 3: Odhad počtu hviezd v galaxii

Zadanie:

Typická špirálová galaxia má hmotnosť $10^{12} M_{\odot}$. Ak je priemerná hmotnosť hviezdy $0,5 M_{\odot}$, koľko hviezd v nej približne nájdeme?

Riešenie:

Počet hviezd vypočítame:

$$N = \frac{10^{12}}{0,5} = 2 \cdot 10^{12}$$

➡ **Výsledok:** V galaxii sa nachádza približne $2 \cdot 10^{12}$ hviezd.

Príklad 4: Pomer hmotností hviezd v disku a výduti

Zadanie:

Ak je v disku galaxie 4-násobne viac hviezdnej hmoty než vo výduti, koľkokrát viac je v disku hmotnosti viazanej na mladšie hviezdy ako vo výduti na staršie?

Riešenie:

Disk obsahuje prevažne mladšie hviezdy, výduť staršie. Pomery hmotností sú 4:1 v prospech disku.

➡ **Výsledok:** V disku je 4-krát viac hmotnosti viazanej na mladšie hviezdy než vo výduti na staršie.

Príklad 5: Klasifikácia galaxie na základe infračerveného pozorovania

Zadanie:

Galaxia pozorovaná z profilu nevykazuje ramená ani centrálnu priečku vo viditeľnom spektre. V infračervenom spektre sa však ukáže jasne definovaná centrálna priečka. Ako ju klasifikujeme?

Riešenie:

Infračervené žiarenie preniká prachom a odhaľuje štruktúru, ktorú viditeľné svetlo neukáže. Zreteľná priečka znamená, že galaxia patrí do triedy SB – špirálová s priečkou.

→ **Výsledok:** Galaxia je typu **špirálová s pričkou (SB)**, zistené na základe infračerveného pozorovania.

Príklad 6: Určenie zložky galaxie podľa pohybu hviezd

Zadanie:

Astronóm objavil hviezdy s veľmi nízkym obsahom kovov, ktoré sa pohybujú po excentrických dráhach ďaleko od roviny disku. Do ktorej zložky galaxie patria a prečo?

Riešenie:

Tieto hviezdy sú staré (nízky obsah kovov) a ich dráhy naznačujú, že nepatria do disku ani výduti. Typické sú pre galaktické halo.

→ **Výsledok:** Hviezdy patria do **halo**, typického pre veľmi staré, málo kovové hviezdy s excentrickými dráhami.

8.3 Rotačné krivky galaxií, temná hmota

Príklad 1: Tvar rotačnej krivky galaxie

Zadanie:

Ako by vyzerala rotačná krivka galaxie (graf rýchlosti v závislosti od vzdialenosti od centra), ak by sa v nej nenachádzala temná hmota? A ako vyzerá v skutočnosti?

Riešenie:

Bez temnej hmoty by sa rýchlosť hviezd po prekročení hustého jadra znižovala podľa Keplerovho zákona ($v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$).

V skutočnosti však rýchlosti hviezd **zostávajú konštantné alebo sa len mierne znižujú** aj vo veľkých vzdialenostiach – čo naznačuje prítomnosť ďalšej (neviditeľnej) hmoty.

→ **Výsledok:** Rotačná krivka v skutočnosti neklesá, ale sa „vyrovnáva“, čo je dôkazom existencie **temnej hmoty**.

Príklad 2: Temná hmota ako nevysvetlená hmotnosť

Zadanie:

Pri pozorovaní galaxie astronómovia zistili, že jej gravitačné pôsobenie nezodpovedá pozorovanému množstvu hviezd a plynu. Ako tento rozpor vysvetľujú?

Riešenie:

Pozorovaná rýchlosť rotácie a pohyb hviezd si vyžadujú omnoho väčšiu hmotnosť, než sa dá vysvetliť bežnou (svietiacou) hmotou.

Preto vedci zaviedli koncept **temnej hmoty**, ktorá síce nevysiela žiadne žiarenie, ale má hmotnosť a gravitačne pôsobí.

→ **Výsledok:** Rozpor sa vysvetľuje existenciou **temnej hmoty**, ktorá tvorí väčšinu hmotnosti galaxie.

Príklad 3: Výpočet hmotnosti z rotačnej rýchlosti

Zadanie:

Galaxia má v určitej vzdialenosti 20 000 svetelných rokov od stredu rotačnú rýchlosť hviezd 220 km/s. Urč hmotnosť galaxie vo vnútri tejto vzdialenosti.

(Použi: $M = \frac{v^2 r}{G}$, kde r je vzdialenosť v metroch, v rýchlosť a $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$)

Riešenie:

Prevedieme vzdialenosť na metre:

$$r = 20\,000 \cdot 9,461 \cdot 10^{15} \text{ m} = 1,8922 \cdot 10^{20} \text{ m}$$

Dosadíme:

$$M = \frac{(2,2 \cdot 10^5)^2 \cdot 1,8922 \cdot 10^{20}}{6,67 \cdot 10^{-11}} \approx 1,37 \cdot 10^{41} \text{ kg}$$

➡ **Výsledok:** Hmotnosť galaxie v danej vzdialenosti je približne $1,37 \cdot 10^{41} \text{ kg}$, čo naznačuje veľký podiel temnej hmoty.

Príklad 4: Porovnanie rotačnej krivky so Slnčnou sústavou

Zadanie:

Prečo je rotačná krivka Slnčnej sústavy klesajúca, ale u galaxií plochá?

Riešenie:

Vo Slnčnej sústave je takmer všetka hmotnosť sústredená v Slnku, takže rýchlosť planét klesá s rastúcou vzdialenosťou podľa Keplerovho zákona.

V galaxii je ale hmotnosť rozložená aj vo vonkajších častiach (najmä v temnej hmote), takže rýchlosť neklesá, ale zostáva takmer konštantná.

➡ **Výsledok:** Galaxie majú ploché rotačné krivky kvôli rozloženiu temnej hmoty mimo ich centra.

Príklad 5: Tvar distribúcie temnej hmoty v galaxii

Zadanie:

Aký tvar má distribúcia temnej hmoty v galaxii podľa pozorovaní? Prečo sa predpokladá tento tvar?

Riešenie:

Z pozorovaní sa predpokladá, že temná hmota tvorí **guľové halo** obklopujúce galaxiu. Tento tvar najlepšie vysvetľuje rovnomerné rotácie hviezd v rôznych smeroch a vzdialenostiach od stredu.

➡ **Výsledok:** Temná hmota sa v galaxii nachádza v **guľovom hale**, ktoré siaha ďaleko za viditeľný disk galaxie.

Príklad 6: Odvodenie hustoty temnej hmoty z rovnomernej rotácie

Zadanie:

Predpokladajme, že vo vonkajších častiach galaxie sa hviezdy pohybujú konštantnou

obvodovou rýchlosťou $v = 200 \text{ km/s}$. Ukáž, že ak táto rýchlosť ostáva konštantná s rastúcou vzdialenosťou r , potom hustota látky (temnej hmoty) v galaktickom hale musí klesať ako $\rho(r) \propto \frac{1}{r^2}$.

Riešenie:

Pre stabilný obežný pohyb platí:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM(r)}{r^2} \Rightarrow M(r) = \frac{v^2 r}{G}$$

Derivovaním hmotnosti podľa polomeru získame objemovú hustotu (pre guľovo symetrické rozloženie):

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM}{dr} = \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \frac{v^2}{G} \Rightarrow \rho(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

➡ **Výsledok:** Aby bola rotačná rýchlosť vo vonkajších častiach galaxie konštantná, hustota temnej hmoty musí **klesať ako** $\frac{1}{r^2}$.

8.4 Hubbleov zákon, rozpínanie vesmíru

Príklad 1: Vzdďaľovanie galaxie podľa Hubbleovho zákona

Zadanie:

Galaxia sa nachádza vo vzdialenosti $d = 100 \text{ Mpc}$. Vypočítaj jej rýchlosť vzdďaľovania, ak vezmeme Hubbleovu konštantu $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$.

Riešenie:

Použijeme Hubbleov zákon:

$$v = H_0 \cdot d = 70 \cdot 100 = 7000 \text{ km/s}$$

➡ **Výsledok:** Rýchlosť vzdďaľovania galaxie je **7000 km/s**.

Príklad 2: Určenie vzdialenosti galaxie z rýchlosti

Zadanie:

Galaxia sa od nás vzdďaľuje rýchlosťou $v = 21000 \text{ km/s}$. Urči jej vzdialenosť pri $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$.

Riešenie:

Z Hubbleovho zákona:

$$d = \frac{v}{H_0} = \frac{21000}{70} = 300 \text{ Mpc}$$

➡ **Výsledok:** Galaxia je vzdialená **300 Mpc**.

Príklad 3: Odhad veku vesmíru z Hubbleovej konštanty

Zadanie:

Vypočítaj odhad veku vesmíru pre $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$. Vyjadri výsledok v rokoch.

Riešenie:

Najprv prevedme jednotky Hubblovej konštanty:

$$H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc} = \frac{70}{3,086 \times 10^{19}} \text{ s}^{-1} \approx 2,27 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

Odhad veku vesmíru:

$$t_0 \approx \frac{1}{H_0} \approx \frac{1}{2,27 \times 10^{-18}} \approx 4,41 \times 10^{17} \text{ s}$$

Prevod na roky:

$$t_0 \approx \frac{4,41 \times 10^{17}}{3,154 \times 10^7} \approx 14 \times 10^9 \text{ rokov}$$

→ **Výsledok:** Odhad veku vesmíru je **približne 14 miliárd rokov**.

Príklad 4: Výpočet červeného posunu vzdialenej galaxie**Zadanie:**

Ak sa galaxia vzdáľuje rýchlosťou $v = 30000 \text{ km/s}$, urč jej červený posun z , pokiaľ $v \ll c$.

Riešenie:

Použijeme aproximáciu:

$$z \approx \frac{v}{c} = \frac{30000}{3 \times 10^5} = 0,1$$

→ **Výsledok:** Červený posun galaxie je **$z = 0,1$** .

Príklad 5: Porovnanie vzdialenosti dvoch galaxií**Zadanie:**

Galaxia A má červený posun $z = 0,05$, galaxia B má $z = 0,20$. O koľko je galaxia B vzdialenejšia ako A, ak použijeme Hubblov zákon a rýchlosť $v \approx zc$?

Riešenie:

Najprv vypočítame rýchlosti:

- $v_A = 0,05 \cdot 3 \times 10^5 = 15000 \text{ km/s}$
- $v_B = 0,20 \cdot 3 \times 10^5 = 60000 \text{ km/s}$

Potom vzdialenosti:

- $d_A = \frac{v_A}{H_0} = \frac{15000}{70} \approx 214 \text{ Mpc}$
- $d_B = \frac{v_B}{70} \approx 857 \text{ Mpc}$

Pomer:

$$\frac{d_B}{d_A} \approx \frac{857}{214} \approx 4$$

➡ **Výsledok:** Galaxia B je **približne 4× vzdialenejšia** ako galaxia A.

Príklad 6: Kozmologický horizont

Zadanie:

Odhadni veľkosť kozmologického horizontu, ak vek vesmíru je $t_0 = 13,8 \times 10^9$ rokov. Použi $c = 3 \times 10^5 \text{ km/s}$.

Riešenie:

Prepočítame roky na sekundy:

$$t = 13,8 \times 10^9 \cdot 3,154 \times 10^7 \approx 4,35 \times 10^{17} \text{ s}$$

Vzdialenosť:

$$d = c \cdot t = 3 \times 10^5 \cdot 4,35 \times 10^{17} = 1,305 \times 10^{23} \text{ km}$$

Prevod na Mpc:

$$1 \text{ Mpc} = 3,086 \times 10^{19} \text{ km} \Rightarrow d \approx \frac{1,305 \times 10^{23}}{3,086 \times 10^{19}} \approx 4228 \text{ Mpc}$$

➡ **Výsledok:** Kozmologický horizont má veľkosť **približne 4200 Mpc**.

9 Kozmológia

9.1 Teoretický úvod

Kozmológia je časť astronómie a fyziky, ktorý sa zaoberá štúdiom vesmíru ako celku – jeho pôvodom, štruktúrou, vývojom a osudom. Opiera sa o všeobecnú teóriu relativity, pozorovania vzdialených objektov, kozmické mikrovlnné pozadie a ďalšie dôkazy.

Veľký tresk a vývoj vesmíru

Základným modelom moderného vesmíru je **model Veľkého tresku**, podľa ktorého bol vesmír pred približne 13,8 miliardami rokov v extrémne hustom a horúcom stave a následne sa začal rozpínať. Niektoré kľúčové štádiá vývoja:

- **Inflácia:** veľmi rýchle rozpínanie vesmíru krátko po Veľkom tresku (10^{-36} s až 10^{-32} s).
- **Primordiálna nukleosyntéza:** vznik ľahkých jadier (H, He, Li) v prvých minútach.
- **Rekombinácia:** asi 380 000 rokov po Veľkom tresku vznikli neutrálne atómy a vesmír sa stal priehľadným – vzniklo **kozmicke mikrovlnné pozadie**.
- **Formovanie galaxií a štruktúr:** gravitačné zhromažďovanie látky, vznik hviezd, galaxií a kôp galaxií.

Červený posun a kozmologické vzdialenosti

Červený posun je jav, pri ktorom sa spektrálne čiary objektov vo vesmíre posúvajú smerom k červenej (dlhšej) časti spektra, ak sa objekty vzdďľujú.

Rozlišujeme:

- **Dopplerov červený posun** – spôsobený pohybom objektu od pozorovateľa (napr. hviezdy).
- **Gravitačný červený posun** – spôsobený zakrivením časopriestoru v silnom gravitačnom poli.
- **Kozmologický červený posun** – spôsobený rozpínaním vesmíru (najdôležitejší v kozmológii).

Vzťah medzi červeným posunom z a vlnovou dĺžkou:

$$z = \frac{\lambda_{\text{pozorovana}} - \lambda_{\text{emitovana}}}{\lambda_{\text{emitovana}}}$$

Pri malých hodnotách z súvisí s rýchlosťou vzdďľovania:

$$v \approx cz$$

kde c je rýchlosť svetla.

Základné kozmologické veličiny:

- **Svetelný čas** - čas, ktorý svetlo potrebovalo, aby sa dostalo k nám.

- **Zdanlivá a vlastná vzdialenosť**

Kozmické mikrovlnné pozadie (CMB)

CMB je reliktné žiarenie z čias, keď bol vesmír starý asi 380 000 rokov. Je to takmer dokonale **izotropné** žiarenie s teplotou okolo **2,725 K**, ktoré pochádza z obdobia, keď sa vesmír stal priehľadným.

Jeho spektrum zodpovedá takmer ideálnemu **Planckovmu žiareniu** a dá sa opísať Wienovým a Stefanovým-Boltzmannovým zákonom.

Nepravidelnosti v CMB ukazujú na štruktúru raného vesmíru – oblasti s mierne vyššou hustotou, z ktorých vznikli galaxie a kopy galaxií.

9.2 Veľký tresk, vývoj vesmíru

Príklad 1: Počet galaxií vo viditeľnom vesmíre (Jednoduché)

Zadanie: Predpokladajme, že v priemernej časti vesmíru je približne **1 galaxia na 100 miliónov svetelných rokov kubických**. Ak má viditeľný vesmír polomer približne **46,5 miliardy svetelných rokov**, odhadnite počet galaxií vo viditeľnom vesmíre.

Riešenie:

Objem viditeľného vesmíru:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(46,5 \times 10^9)^3$$

$$V \approx 4,2 \times 10^{32} \text{ svetelných rokov}^3$$

Počet galaxií:

$$\text{Počet galaxií} = \frac{V}{100 \times 10^6} = \frac{4,2 \times 10^{32}}{1 \times 10^8}$$

$$\approx 4,2 \times 10^{24}$$

 **Výsledok:** Odhadovaný počet galaxií vo viditeľnom vesmíre je **4,2 kvadrilióna** ($4,2 \times 10^{24}$).

Príklad 2: Koľko fotónov obsahuje kozmické mikrovlnné pozadie?

Zadanie: Kozmické mikrovlnné pozadie (CMB) má teplotu **2,725 K** a správa sa ako takmer dokonalé čierne teleso. Určte počet fotónov na meter kubický v tomto žiarení. Použite vzťah:

$$n = \frac{16\pi\zeta(3)}{c^3 h^3} (kT)^3$$

kde $\zeta(3) \approx 1,202$, $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$, $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ Js}$ a $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Riešenie: Dosadíme do vzťahu:

$$n = \frac{16\pi \times 1,202}{(3 \times 10^8)^3 (6,63 \times 10^{-34})^3} \times (1,38 \times 10^{-23} \times 2,725)^3$$

Po dosadení a výpočtoch:

$$n \approx 410 \text{ fotonov/m}^3$$

→ **Výsledok:** CMB obsahuje približne **410 fotónov na meter kubický**.

Príklad 3: Vzďialenosť z červeného posunu

Zadanie: Galaxia vykazuje červený posun $z = 2,5$. Ak je Hubblova konštanta $H_0 = 70 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$, vypočítajte aktuálnu vzdialenosť galaxie od Zeme v megaparsekoch. Použite vzťah:

$$d = \frac{cz}{H_0}$$

Riešenie: Dosadíme do vzorca:

$$d = \frac{3 \times 10^5 \times 2,5}{70}$$
$$d \approx \frac{750000}{70} \approx 10714 \text{ Mpc}$$

→ **Výsledok:** Vzdialenosť galaxie od Zeme je približne **10 714 Mpc**.

Príklad 4: Reliktné žiarenie a jeho spektrum

Zadanie: Aká je vlnová dĺžka maxima spektra CMB pri teplote **2,725 K**? Použite Wienov zákon:

$$\lambda_{max} = \frac{2,9 \times 10^{-3}}{T}$$

Riešenie: Dosadíme teplotu:

$$\lambda_{max} = \frac{2,9 \times 10^{-3}}{2,725}$$
$$\lambda_{max} \approx 1,064 \times 10^{-3} \text{ m}$$

→ **Výsledok:** Vlnová dĺžka maxima spektra CMB je približne **1,064 mm**.

Príklad 5: Rýchlosť vzdďalovania galaxie

Zadanie: Galaxia má červený posun $z = 0,8$. Vypočítajte jej rýchlosť vzdďalovania voči Zemi. Použite vzťah:

$$v = cz$$

Riešenie: Dosadíme:

$$v = (3 \times 10^5) \times 0,8$$
$$v = 240000 \text{ km/s}$$

→ **Výsledok:** Rýchlosť vzdďalovania galaxie je **240 000 km/s**.

Vzdialenosť galaxie:

$$d = \frac{300000 \times 0,5}{H_0} = \frac{150000}{H_0}$$

Hubbleov vzťah:

$$150000 = H_0 \times \frac{150000}{H_0}$$

$$H_0 \approx 100 \text{ km.s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$$

→ **Výsledok:** Hodnota Hubblovej konštanty je **100 km.s⁻¹·Mpc⁻¹**.

Príklad 3: Časová os kozmologického červeného posunu

Zadanie: Ak červený posun galaxie zodpovedá hodnotám $z = 1,5$, koľko rokov trvalo svetlu, aby sa dostalo k nám, ak je Hubbleova konštanta $H_0 = 70 \text{ km.s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$? Predpokladajme konštantnú hodnotu Hubblovej konštanty a použite vzťah:

$$t = \frac{z}{H_0}$$

Riešenie:

Vzdialenosť galaxie:

$$d = \frac{c \times z}{H_0} = \frac{300000 \times 1,5}{70} \approx 6429 \text{ Mpc}$$

Prevod vzdialenosti na roky: $1 \text{ Mpc} = 3,09 \times 10^{19} \text{ km}$

$$d = 6429 \times 3,09 \times 10^{19} \approx 1,99 \times 10^{23} \text{ km}$$

Čas letu svetla:

$$t = \frac{1,99 \times 10^{23}}{3 \times 10^5 \times 3,15 \times 10^7}$$

$$t \approx 2,1 \times 10^{10} \text{ rokov}$$

→ **Výsledok:** Svetlu z galaxie trvalo **21 miliárd rokov**, aby sa dostalo k nám.

Príklad 4: Vzdialenosť galaxie pomocou Hubbleovho zákona

Zadanie: Galaxia sa od nás vzdďľuje rýchlosťou **120 000 km/s**. Ak je Hubbleova konštanta $H_0 = 75 \text{ km.s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$, určte vzdialenosť tejto galaxie.

Riešenie:

$$d = \frac{v}{H_0} = \frac{120000}{75} \approx 1600 \text{ Mpc}$$

→ **Výsledok:** Vzdialenosť galaxie je **1600 Mpc**.

Príklad 5: Červený posun pri známej vzdialenosti

Zadanie: Galaxia sa nachádza vo vzdialenosti **4500 Mpc**. Ak je Hubblova konštanta $H_0 = 70 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$, určte červený posun galaxie. Použite vzťah:

$$v = H_0 \times d$$

$$z = \frac{v}{c}$$

Riešenie:

Rýchlosť galaxie:

$$v = 70 \times 4500 = 315000 \text{ km/s}$$

Červený posun:

$$z = \frac{315000}{300000} \approx 1,05$$

➡ **Výsledok:** Červený posun galaxie je **1,05**.

Príklad 6: Vek vesmíru z červeného posunu

Zadanie: Ak má galaxia červený posun $z = 6$, aký bol vek vesmíru, keď toto svetlo opustilo galaxiu, ak aktuálny vek vesmíru je **13,8 miliardy rokov**?

Riešenie:

Čas, keď svetlo opustilo galaxiu:

$$t = \frac{13,8}{1 + z}$$

$$t = \frac{13,8}{1 + 6} \approx 1,97 \text{ miliardy rokov}$$

Vek vesmíru v tom čase:

$$13,8 - 1,97 \approx 11,83 \text{ miliardy rokov}$$

➡ **Výsledok:** Vek vesmíru bol **11,83 miliardy rokov**, keď svetlo opustilo galaxiu.

9.4 Temná energia a expanzia vesmíru

Príklad 1: Hustota temnej energie

Zadanie: Ak vieme, že temná energia tvorí **68 %** celkovej hustoty vesmíru, a kritická hustota vesmíru je približne $9,9 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3$, aká je hustota temnej energie?

Riešenie:

Výpočet hustoty temnej energie:

$$\rho_{DE} = 0,68 \times 9,9 \times 10^{-30}$$

$$\rho_{DE} \approx 6,732 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3$$

➡ **Výsledok:** Hustota temnej energie je $6,732 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3$.

Príklad 2: Expanzia vesmíru

Zadanie: Ak je Hubblova konštanta $H_0 = 70 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$, vypočítajte rýchlosť vzdľavovania galaxie nachádzajúcej sa vo vzdialenosti **1000 Mpc**.

Riešenie:

Použijeme Hubblov zákon:

$$v = H_0 \times d = 70 \times 1000 = 70000 \text{ km/s}$$

➡ **Výsledok:** Rýchlosť vzdľavovania galaxie je **70 000 km/s**.

Príklad 3: Vek vesmíru z Hubblovej konštanty

Zadanie: Ak je Hubblova konštanta $H_0 = 67 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$, odhadnite vek vesmíru v miliardách rokov. Použite vzťah:

$$t_0 = \frac{1}{H_0}$$

pričom musíme Hubblovu konštantu prepočítať na jednotky s^{-1} .

Riešenie:

Prevod Hubblovej konštanty:

$$H_0 = \frac{67 \times 10^3 \text{ m/s}}{3,09 \times 10^{22} \text{ m}} \approx 2,17 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

3. Vek vesmíru:

$$t_0 = \frac{1}{2,17 \times 10^{-18}} \approx 4,61 \times 10^{17} \text{ s}$$

3. Prevod na roky:

$$4,61 \times 10^{17} \div (3,15 \times 10^7) \approx 14,62 \text{ miliárd rokov}$$

➡ **Výsledok:** Odhadovaný vek vesmíru je **14,62 miliárd rokov**.

Príklad 4: Parameter hustoty a expanzia

Zadanie: Ak je aktuálna hodnota parametra hustoty vesmíru $\Omega = 1,04$, čo naznačuje, že vesmír je mierne uzavretý, aká by musela byť hodnota Ω , aby sa expanzia vesmíru zastavila a začala kontrakcia?

Riešenie:

Ak je $\Omega = 1$, vesmír je plochý a expanzia sa spomaľuje, ale nikdy sa nezastaví.

Aby sa expanzia zastavila a začala kontrakcia, Ω by muselo byť väčšie ako 1, a teda:

$$\Omega > 1$$

➡ **Výsledok:** Hodnota parametra hustoty by musela byť **väčšia ako 1**, aby sa expanzia vesmíru zastavila a začala kontrakcia.

Príklad 5: Temná energia a expanzia

Zadanie: Ak je Hubblova konštanta $H_0 = 70 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ a parameter hustoty temnej energie je $\Omega_{DE} = 0,7$, určte zrýchlenie expanzie vesmíru v jednotkách m/s^2 . Použite vzťah:

$$a = H_0^2 \times \Omega_{DE} \times d$$

kde d je vzdialenosť v Mpc. Predpokladajme $d = 1000 \text{ Mpc}$.

Riešenie:

Prevod Hubblovej konštanty na s^{-1} :

$$H_0 = \frac{70 \times 10^3}{3,09 \times 10^{22}} \approx 2,27 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

Zrýchlenie expanzie:

$$a = (2,27 \times 10^{-18})^2 \times 0,7 \times 1000 \times 3,09 \times 10^{22}$$

$$a \approx 1,1 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$$

➡ **Výsledok:** Zrýchlenie expanzie vesmíru je **$1,1 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$** .

Príklad 6: Hustota temnej energie a kozmologická konštanta

Zadanie: Kozmologická konštanta Λ je definovaná vzťahom:

$$\Lambda = \frac{8\pi G \rho_{DE}}{c^2}$$

Ak je hustota temnej energie $\rho_{DE} = 6,732 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3$, gravitačná konštanta $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ a rýchlosť svetla $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, určte hodnotu Λ .

Riešenie:

Prevod hustoty do kg/m^3 :

$$\rho_{DE} = 6,732 \times 10^{-30} \times 1000 \approx 6,732 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3$$

Výpočet Λ :

$$\Lambda = \frac{8\pi \times 6,67 \times 10^{-11} \times 6,732 \times 10^{-27}}{(3 \times 10^8)^2}$$

$$\Lambda \approx 1,26 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2}$$

➡ **Výsledok:** Kozmologická konštanta Λ je **$1,26 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2}$** .

10 Astronomická navigácia a história

10.1 Teoretický úvod

Astronomická navigácia je jednou z najstarších aplikácií astronómie, ktorá sa využívala na určovanie polohy, času a orientácie na základe pozorovania nebeských objektov. Táto kapitola sa sústreďuje na základy merania času, kalendárne systémy, rovníkennosti, precesiu a historické metódy merania polôh a vzdialeností.

Meranie času (slnečný, siderický, UTC)

Slnečný čas:

Slnečný deň je definovaný ako čas medzi dvoma po sebe nasledujúcimi hornými kulmináciami Slnka.

Slnečný čas sa líši od skutočného slnečného času (tzv. pravý slnečný čas) v dôsledku excentricity Zeme a sklonu jej osi.

Rovnica času:

$$ET = ST - MST$$

kde:

- ET – rovnica času,
- ST – skutočný slnečný čas,
- MST – stredný slnečný čas.

Siderický čas:

Definovaný ako časový interval medzi dvoma po sebe nasledujúcimi prechodmi jarného bodu cez miestny poludník.

Siderický deň je približne o 4 minúty kratší ako slnečný deň.

Vzťah medzi slnečným a siderickým časom:

$$T_{sid} = T_{sol} - 4 \times \text{minúty}$$

UTC (Coordinated Universal Time):

- Systém času založený na atómových hodinách.
- Používa sa ako základ pre všetky časové zóny na svete.
- UTC sa upravuje pomocou prestupných sekúnd kvôli nepravidelnostiam rotácie Zeme.

Kalendáre, rovníkennosti, precesia

Kalendáre:

Kalendár je systém rozdelenia času do dní, týždňov, mesiacov a rokov.

Juliánsky kalendár: Zavedený Júliusom Cézarom v roku 46 p.n.l., každý 4. rok je priestupný.

Gregoriánsky kalendár: Zavedený v roku 1582, zavádza korekciu pre lepšie zosúladenie s tropickým rokom.

Tropický rok: Čas medzi dvoma po sebe nasledujúcimi prechodmi Slnka cez jarný bod. Je to približne **365,2422 dní**.

Rovnodennosti:

Dni, keď Slnko prechádza bodmi na nebeskom rovníku.

Jarná rovnodennosť: Okolo 20. marca, začiatok astronomickej jari.

Jesenná rovnodennosť: Okolo 23. septembra, začiatok astronomickej jesene.

Precesia:

Pomaly rotujúci pohyb zemskej osi spôsobený gravitačnými interakciami medzi Zemou, Slnkom a Mesiacom.

Precesný cyklus trvá približne **25 800 rokov**.

Výsledkom precesie je zmena polohy jarného bodu a posun hviezdnych súradníc.

Historické metódy merania polôh a vzdialeností

Astroláb: Prístroj na meranie výšky hviezd a určovanie času, ktorý sa používal v staroveku a stredoveku.

Kvadrant: Prístroj, ktorý umožňoval merať uhlovú výšku nebeských objektov.

Sextant: Presný nástroj na meranie uhlových vzdialeností medzi nebeskými objektmi a horizontom.

Triangulácia:

Metóda používaná na určovanie vzdialeností pomocou merania uhlov a dĺžok základne trojuholníka. Používa sa pri určovaní polôh hviezd aj na mapovanie zemského povrchu.

Paralaxa:

Prvá metóda merania vzdialeností hviezd.

Bessel (1838) – prvé meranie hviezdnej paralaxy (61 Cygni).

Významné historické osobnosti:

Hipparchos: Zaviedol systém súradníc a zostavil prvý hviezdny katalóg.

Ptolemaios: Geocentrický model vesmíru.

Kopernik: Heliocentrický model vesmíru.

Tycho Brahe: Presné merania polôh planét.

Johannes Kepler: Tri zákony pohybu planét.

Galileo Galilei: Pozorovania Mesiaca, Jupitera a jeho mesiacov, Slnka.

10.2 Meranie času (slnečný, siderický, UTC)

Príklad 1: Siderický čas

Zadanie: Astronóm pozoruje hviezdu, ktorá prechádza miestnym poludníkom o 22:00 miestneho slnečného času. Aký je siderický čas v tom momente, ak vieme, že 1 siderický deň je o 4 minúty kratší ako slnečný deň?

Riešenie:

- Siderický deň je o 4 minúty kratší ako slnečný deň, takže rozdiel medzi slnečným a siderickým časom je 4 minúty denne.
- Za 22 hodín slnečného času sa nahromadí:

$$\text{Rozdiel} = 22 \times \left(\frac{4}{24}\right) = 3,67 \text{ minút}$$

- Siderický čas je teda o 3,67 minút napred, takže:

$$T_{sid} = 22:00 + 3,67 \text{ minút} \approx 22:03,67$$

➡ **Výsledok:** Siderický čas je približne **22:03,67**.

Príklad 2: Výpočet UTC

Zadanie: Astronóm vo Vancouveri (časová zóna UTC -8) pozoruje kulmináciu hviezdy o 18:30 miestneho času. Aká je hodnota UTC a aký je slnečný čas na miestnom poludníku?

Riešenie:

- Vancouver je v časovej zóne UTC -8, takže:

$$UTC = 18:30 + 8 \text{ hodín} = 02:30$$

- Slnečný čas na miestnom poludníku sa určí tak, že pridáme korekciu zemepisnej dĺžky. Ak je Vancouver na 123° západnej dĺžky:

$$\text{Korekcia} = \frac{123^\circ}{15^\circ/h} = 8,2 \text{ hodín}$$

$$ST = 02:30 + 8,2 = 10:42$$

➡ **Výsledok:** Hodnota UTC je **02:30** a slnečný čas na miestnom poludníku je **10:42**.

Príklad 3: Určenie rovnice času

Zadanie: V jeden deň je skutočný slnečný čas o 6 minút pozadu za stredným slnečným časom. Aká je rovnica času a aký je siderický čas o 14:00 miestneho času, ak vieme, že siderický deň je o 4 minúty kratší ako slnečný deň?

Riešenie:

- Rovnica času je daná ako:

$$ET = ST - MST$$

V tomto prípade:

$$ET = -6 \text{ minút}$$

- Siderický čas sa určí podobne ako v príklade 1. Za 14 hodín sa nahromadí:

$$\text{Rozdiel} = 14 \times \left(\frac{4}{24}\right) = 2,33 \text{ minút}$$

$$T_{sid} = 14:00 + 2,33 = 14:02,33$$

 **Výsledok:** Rovnica času je **-6 minút**, siderický čas je **14:02,33**.

Príklad 4: Výpočet slnečného času

Zadanie: Astronóm zistí, že Slnko prechádza miestnym poludníkom o 12:04 miestneho slnečného času. Koľko je UTC, ak sa nachádza v časovej zóne UTC +1?

Riešenie:

- Miestny slnečný čas je o 4 minúty neskôr ako stredný slnečný čas:

$$ST = 12:04 - 4 \text{ minúty} = 12:00$$

- UTC sa určí odpočítaním časovej zóny:

$$UTC = 12:00 - 1 \text{ hodina} = 11:00$$

 **Výsledok:** Hodnota UTC je **11:00**.

Príklad 5: Výpočet siderického času

Zadanie: Astronóm v meste na 90° východnej dĺžke pozoruje hviezdu, ktorá prechádza poludníkom o 16:00 miestneho času. Aký je siderický čas, ak je siderický deň o 4 minúty kratší?

Riešenie:

- Za 16 hodín sa nahromadí:

$$\text{Rozdiel} = 16 \times \left(\frac{4}{24}\right) = 2,67 \text{ minút}$$

$$T_{sid} = 16:00 + 2,67 \approx 16:02,67$$

 **Výsledok:** Siderický čas je **16:02,67**.

Príklad 6: Výpočet rovnice času

Zadanie: V určitý deň je pravý slnečný čas o 8 minút napred pred stredným slnečným časom. Aký je UTC o 20:00 miestneho času v časovej zóne UTC +3 a aký je siderický čas?

Riešenie:

- Rovnica času je daná ako:

$$ET = ST - MST = +8 \text{ minút}$$

- Miestny slnečný čas je:

$$20:00 - 8 = 19:52$$

- UTC je:

$$19:52 - 3 \text{ hodiny} = 16:52$$

- Siderický čas sa vypočíta:

$$\text{Rozdiel} = 20 \times \left(\frac{4}{24}\right) = 3,33 \text{ minút}$$

$$T_{sid} = 20:00 + 3,33 \approx 20:03,33$$

➡ **Výsledok:** Hodnota UTC je **16:52**, siderický čas je **20:03,33**.

10.3 Kalendáre, rovnodennosti, precesia

Príklad 1: Výpočet prestupného roka

Zadanie: Určte, či rok 2100 bude prestupným rokom podľa Gregoriánskeho kalendára.

Riešenie:

- V Gregoriánskom kalendári platí:
 - Rok je prestupný, ak je deliteľný 4, ale nie 100, alebo je deliteľný 400.
- Rok 2100 je deliteľný 4, ale aj 100, a nie je deliteľný 400.

➡ **Výsledok:** Rok **2100 nebude prestupným rokom**.

Príklad 2: Výpočet jarného slnovratu

Zadanie: Jarný slnovrat v roku 2025 nastane 20. marca o 09:24 UTC. Aký bude miestny čas v Tokiu (UTC +9)?

Riešenie:

- V Tokiu je časový posun +9 hodín voči UTC.

$$\text{Miestny čas} = 09:24 + 9 = 18:24$$

➡ **Výsledok:** Jarný slnovrat v Tokiu nastane **20. marca o 18:24 miestneho času**.

Príklad 3: Výpočet precesie Zeme

Zadanie: Precesný cyklus Zeme trvá približne 26 000 rokov. Ak sa súčasný severný pól (Polárka) posunie o 10° v dôsledku precesie, koľko rokov tento posun potrvá?

Riešenie:

- Precesný cyklus je 360° za 26 000 rokov.

- Jeden stupeň precesie trvá:

$$\frac{26000}{360} \approx 72,22 \text{ rokov}$$

- Pre posun o 10° :

$$10 \times 72,22 = 722,2 \text{ rokov}$$

→ Výsledok: Posun o 10° bude trvať približne 722 rokov.

Príklad 4: Určenie dátumu rovnodennosti

Zadanie: V aký deň a čas nastane jesenná rovnodennosť v roku 2030, ak vieme, že každý rok sa rovnodennosť posúva o približne 5 hodín 49 minút? V roku 2029 bola rovnodennosť 23. septembra o 07:50 UTC.

Riešenie:

- V roku 2030 sa rovnodennosť posunie o 5 hodín 49 minút neskôr:

$$07:50 + 5:49 = 13:39 \text{ UTC}$$

Dátum zostáva 23. september.

→ Výsledok: Jesenná rovnodennosť v roku 2030 nastane **23. septembra o 13:39 UTC**.

Príklad 5: Dĺžka roka v Juliánskom a Gregoriánskom kalendári

Zadanie: Porovnajme dĺžku roka v Juliánskom a Gregoriánskom kalendári a určte rozdiel po 100 rokoch.

Riešenie:

- V Juliánskom kalendári je rok dlhý 365,25 dní.
- V Gregoriánskom kalendári je rok dlhý 365,2425 dní.
- Rozdiel za jeden rok je:

$$365,25 - 365,2425 = 0,0075 \text{ dní}$$

- Za 100 rokov:

$$100 \times 0,0075 = 0,75 \text{ dní}$$

→ Výsledok: Rozdiel za 100 rokov je 0,75 dní.

Príklad 6: Výpočet precesného posunu

Zadanie: Ak aktuálne trvá precesný cyklus Zeme 25 800 rokov a Zem sa posunie o 3° v rámci tohto cyklu, aký bude časový interval tohto posunu?

Riešenie:

- Jeden stupeň precesie trvá:

$$\frac{25800}{360} \approx 71,67 \text{ rokov}$$

- Posun o 3° :

$$3 \times 71,67 \approx 215,01 \text{ rokov}$$

➡ **Výsledok:** Posun o 3° bude trvať približne 215 rokov.

10.4 Historické metódy merania polôh a vzdialeností

Príklad 1: Meranie vzdialenosti Mesiaca – metóda triangulácie

Zadanie: Astronóm v starovekom Grécku pozoroval Mesiac z dvoch rôznych miest vzdialených od seba 800 km. Zistil, že uhol medzi Mesiacom a oboma pozorovateľmi je $0,5^\circ$. Vypočítajte vzdialenosť Mesiaca od Zeme.

Riešenie:

- Pre výpočet použijeme vzťah:

$$d = \frac{L}{\tan(\theta)}$$

kde:

- $L = 800 \text{ km}$ – základňa
- $\theta = 0,5^\circ$ – uhol

$$d = \frac{800}{\tan(0,5^\circ)} \approx \frac{800}{0,00873} \approx 91650 \text{ km}$$

➡ **Výsledok:** Vzdialenosť Mesiaca je približne 91 650 km.

Príklad 2: Určenie polohy hviezdy pomocou astrolábu

Zadanie: Astronóm použil astroláb na určenie výšky hviezdy nad horizontom. Ak nameral výšku 37° , aká je rektascenzia a deklinácia hviezdy, ak je miestny hviezdny čas 10 hodín a zemepisná šírka miesta pozorovania je 48° ?

Riešenie:

- Deklináciu vypočítame zo vzťahu:

$$\delta = \sin^{-1}(\sin(h) \cdot \sin(\phi) + \cos(h) \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t))$$

kde:

- $h = 37^\circ$ – výška
- $\phi = 48^\circ$ – zemepisná šírka
- $t = 2$ hodiny (rozdiel medzi hviezdny časom a rektascenziou)

$$\delta = \sin^{-1}(\sin(37^\circ) \cdot \sin(48^\circ) + \cos(37^\circ) \cdot \cos(48^\circ) \cdot \cos(2 \cdot 15^\circ))$$

Po dosadení a výpočte:

$$\delta \approx \sin^{-1}(0,6018 \cdot 0,7431 + 0,7986 \cdot 0,6691 \cdot 0,9659)$$

$$\delta \approx \sin^{-1}(0,4474 + 0,5151) \approx \sin^{-1}(0,9625) \approx 74,6^\circ$$

Pre rektascenziu:

$$RA = 10 - 2 = 8 \text{ hodín}$$

➡ **Výsledok:** Deklinácia hviezdy je **74,6°** a jej rektascenzia je **8 hodín**.

Príklad 3: Meranie veľkosti Zeme pomocou metódy Eratosthena

Zadanie: Eratosthenes použil metódu merania tieňov v dvoch rôznych mestách – v Alexandrii a Syéne. V Alexandrii bola výška Slnka $7,2^\circ$ od zenitu a vzdialenosť medzi mestami bola 800 km. Určte obvod Zeme.

Riešenie:

- Uhol medzi mestami je $7,2^\circ$.
- Tento uhol predstavuje časť kruhu:

$$\frac{7,2^\circ}{360^\circ} = \frac{800 \text{ km}}{C}$$

kde C je obvod Zeme.

- Po úprave:

$$C = \frac{800 \times 360}{7,2} \approx 40000 \text{ km}$$

➡ **Výsledok:** Obvod Zeme je **približne 40 000 km**.

Príklad 4: Určenie dĺžky zatmenia Slnka a jeho pozorovateľnosti

Zadanie: Astronóm v starovekom Babylone zaznamenal, že zatmenie Slnka začalo o 10:30 a skončilo o 12:00 miestneho času. O 10:45 však prišla hustá oblačnosť, ktorá znemožnila pozorovanie Slnka až do 11:30. Aká bola celková dĺžka zatmenia? Akú dĺžku trvalo pozorovateľné zatmenie?

Riešenie:

Celková dĺžka zatmenia:

$$12:00 - 10:30 = 1 \text{ hodina } 30 \text{ minút}$$

Pozorovateľná časť zatmenia:

- Prvá fáza pozorovania:

$$10:30 - 10:45 = 15 \text{ minút}$$

- Druhá fáza pozorovania:

$$11:30 - 12:00 = 30 \text{ minút}$$

- Celková pozorovateľná doba:

$$15 + 30 = 45 \text{ minút}$$

➡ **Výsledok:** Celkové trvanie zatmenia bolo **1 hodina a 30 minút**, ale pozorovateľná časť trvala len **45 minút**.

Príklad 5: Určenie polohy hviezd podľa Ptolemaia

Zadanie: Ptolemaios použil astroláb na určenie polohy hviezd a vypočítal, že jej výška nad horizontom je 45° a azimut 30° . Aká je deklinácia a rektascenzia hviezd, ak je miestny hviezdny čas 8 hodín a zemepisná šírka miesta pozorovania je 36° ?

Riešenie:

- Deklináciu vypočítame zo vzťahu:

$$\delta = \sin^{-1}(\sin(45^\circ) \cdot \sin(36^\circ) + \cos(45^\circ) \cdot \cos(36^\circ) \cdot \cos(1 \cdot 15^\circ))$$

$$\delta \approx \sin^{-1}(0,7071 \cdot 0,5878 + 0,7071 \cdot 0,8090 \cdot 0,9659)$$

$$\delta \approx \sin^{-1}(0,4157 + 0,5528) \approx \sin^{-1}(0,9685) \approx 75,5^\circ$$

Pre rektascenziu:

$$RA = 8 - 1 = 7 \text{ hodín}$$

➡ **Výsledok:** Deklinácia hviezd je **$75,5^\circ$** a jej rektascenzia je **7 hodín**.

Príklad 6: Určenie vzdialenosti hviezd pomocou paralaxy

Zadanie: Hipparchos odhadol paralaxu hviezd na $0,1^\circ$ a určil, že základňa jeho pozorování bola 100 km. Určte vzdialenosť hviezd v parsekoch.

Riešenie:

- Vzorec pre paralaxu:

$$d = \frac{L}{\tan(p)}$$

kde:

- $L = 100 \text{ km}$ – základňa
- $p = 0,1^\circ$ – paralaxa

$$d = \frac{100}{\tan(0,1^\circ)} \approx \frac{100}{0,001745} \approx 57220 \text{ km}$$

- Pre prepočet na parseky:

$$d = \frac{57220}{3,086 \times 10^{13}} \approx 1,85 \times 10^{-9} \text{ parsekov}$$

→ **Výsledok:** Vzdialenosť hviezdry je približne $1,85 \times 10^{-9}$ parsekov.

11 Neriešené príklady na precvičenie

Príklad 1

Astronóm sleduje hviezdu s rektascenziou 14h 22m a deklináciou -32° . Pozorovacie stanovište sa nachádza na zemepisnej šírke 52°N . Určte:

- Čas východu a západu hviezdy v miestnom čase.
- Azimut východu a západu.
- Maximálnu výšku hviezdy nad obzorom.

Výsledok:

→ Východ: 02:13 LST, Azimut: 98° ; Západ: 21:47 LST, Azimut: 262° ; Maximálna výška: 46° .

Príklad 2

Z pozorovacieho stanovišťa na zemepisnej šírke 24°S je počas letného slnovratu pozorovaná hviezda s deklináciou $+15^\circ$. Určte:

- Dĺžku denného oblúka hviezdy nad obzorom.
- Čas, počas ktorého je hviezda cirkumpolárna.
- Azimut hviezdy pri východe a západe.

Výsledok:

→ Denný oblúk: 14 hodín; Cirkumpolárna: 3 hodiny; Azimut: 104° (východ), 256° (západ).

Príklad 3

Na pozorovacej stanici na zemepisnej šírke 68°N sleduje astronóm počas zimného slnovratu Slnko. Určte:

- Čas a azimut východu a západu Slnka (ak nastane).
- Maximálnu výšku Slnka nad obzorom.
- Celkový počet hodín slnečného svitu.

Výsledok:

→ Východ: Nenastáva, Západ: Nenastáva (polárna noc); Maximálna výška: -1.5° ; Slnečný svit: 0 hodín.

Príklad 4

Astronóm používa reflektorický ďalekohľad s priemerom zrkadla 200 mm a ohniskovou vzdialenosťou 1200 mm. Pomocou okuláru s ohniskovou vzdialenosťou 25 mm pozoruje Jupiter. Určte:

- Zväčšenie ďalekohľadu.
- Rozlišovaciu schopnosť ďalekohľadu.

- Svetelnosť ďalekohľadu v porovnaní s ľudským okom (pri predpoklade priemeru zrenice 6 mm).

Výsledok:

→ Zväčšenie: 48x; Rozlišovacia schopnosť: 0.58"; Svetelnosť: 1111x.

Príklad 5

Astronóm pozoruje dvojhviezdu s uhlovým rozstupom 0.4" pomocou refraktora s priemerom 100 mm a ohniskovou vzdialenosťou 800 mm. Určte:

- Minimálne zväčšenie potrebné na rozlíšenie dvojhviezdy.
- Ohniskovú vzdialenosť vhodného okuláru.
- Rozlišovaciu schopnosť ďalekohľadu.

Výsledok:

→ Minimálne zväčšenie: 200x; Ohnisková vzdialenosť okuláru: 4 mm; Rozlišovacia schopnosť: 1.22".

Príklad 6

Fotometrista meria jasnosť hviezdy, ktorá je 10-krát jasnejšia ako referenčná hviezda s magnitúdou 12.5. Určte:

- Magnitúdu pozorovanej hviezdy.
- Koľkokrát jasnejšia by musela byť hviezda, aby jej magnitúda klesla na 10.0.
- Aká by bola magnitúda, ak by hviezda bola pozorovaná cez filter, ktorý znižuje jej jasnosť o 2 magnitúdy?

Výsledok:

→ Magnitúda: 11.0; Potrebný nárast jasu: 6.31x; Magnitúda cez filter: 13.0.

Príklad 7

Astronóm určuje paralaxu blízkej hviezdy a zmeria jej hodnotu ako 0.045 arcsec. Určte:

- Vzdialenosť hviezdy v parsekoch.
- Vzdialenosť hviezdy v svetelných rokoch.
- Koľkokrát je táto hviezda vzdialenejšia ako Alfa Centauri (4.37 ly).

Výsledok:

→ Vzdialenosť: 22.2 pc; Vzdialenosť: 72.4 ly; Násobok vzdialenosti: 16.6x.

Príklad 8

Dvojhviezdny systém má zdanlivú magnitúdu 7.2 a 8.5. Pomocou spektroskopie bola určená vzdialenosť systému na 450 ly. Určte:

- Absolútnu magnitúdu každej zložky.

- Celkovú zdanlivú magnitúdu systému.
- Rozdiel jasnosti medzi jasnejšou a slabšou zložkou.

Výsledok:

➡ Absolútna magnitúda: 1.4, 2.7; Celková magnitúda: 6.7; Rozdiel jasnosti: 3.1x.

Príklad 9

Astronóm pozoruje supernovu typu Ia v galaxii, ktorej známa absolútna magnitúda je -19.3. Zmeria jej zdanlivú magnitúdu ako 14.5. Určte:

- Vzdialenosť k galaxii v svetelných rokoch.
- Vzdialenosť k galaxii v megaparsekoch.
- Aká by bola zdanlivá magnitúda supernovy, keby bola dvakrát bližšie?

Výsledok:

➡ Vzdialenosť: 69.2 Mly; Vzdialenosť: 21.2 Mpc; Magnitúda: 13.8.

Príklad 10

Sonda obiehajúca okolo Marsu má kruhovú orbitu s polomerom 4500 km nad povrchom planéty. Hmotnosť Marsu je 6.42×10^{23} kg. Určte:

- Orbitálnu rýchlosť sondy.
- Obdobie obehu.
- Kinetickú energiu sondy, ak jej hmotnosť je 1500 kg.

Výsledok:

➡ Rýchlosť: 1.24 km/s; Obdobie: 6.5 hodiny; Kinetická energia: 1.16×10^{10} J.

Príklad 11

Hviezda obieha okolo čiernej diery s hmotnosťou 2.5×10^{30} kg vo vzdialenosti 0.02 AU. Predpokladajte kruhovú dráhu a určte:

- Rýchlosť hviezdy.
- Gravitačnú potenciálnu energiu systému.
- Aká by musela byť rýchlosť hviezdy, aby unikla z gravitačného poľa čiernej diery?

Výsledok:

➡ Rýchlosť: 2.1×10^5 m/s; Potenciálna energia: -5.3×10^{39} J; Úniková rýchlosť: 3.0×10^5 m/s.

Príklad 12

Planetárna sonda sa pohybuje po hyperbolickej dráhe s rýchlosťou 15 km/s vo vzdialenosti 700 000 km od Jupiteru. Určte:

- Únikovú rýchlosť na tejto vzdialenosti.

- S akou rýchlosťou by sonda unikla do medziplanetárneho priestoru?
- Aká by bola jej kinetická energia na povrchu Jupitera, ak by tam pristála bez straty energie?

Výsledok:

→ Úniková rýchlosť: 17.6 km/s; Úniková rýchlosť do priestoru: 7.1 km/s; Kinetická energia: 1.35×10^{11} J.

Príklad 13

Pozorovateľ sleduje prechod exoplanéty pred hviezdou s polomerom $R = 7 \times 10^8$ m. Počas tranzitu klesne jas hviezdy o 1.6 %. Určte:

- Polomer exoplanéty.
- Povrch exoplanéty v km².
- Koľkokrát je jej plocha väčšia ako plocha Zeme?

Výsledok:

→ Polomer: 8.8×10^6 m; Plocha: 9.7×10^8 km²; Pomer: 1.9x.

Príklad 14

Hviezda má hmotnosť $1.1 M_{\odot}$ a okolo nej obieha exoplanéta s periódou 88 dní. Určte:

- Veľkú poloos dráhy planéty.
- Obvod dráhy v AU.
- Rýchlosť planéty na orbite (v km/s).

Výsledok:

→ Poloos: 0.37 AU; Obvod: 2.32 AU; Rýchlosť: 30.8 km/s.

Príklad 15

Exoplanéta má efektívnu teplotu 290 K a od svojej hviezdy je vzdialená 1.15 AU. Predpokladajte, že hviezda má svietivosť rovnakú ako Slnko. Určte:

- Približnú svietivosť hviezdy v jednotkách Slnka.
- Odhad povrchovej teploty hviezdy.
- Je planéta v obývateľnej zóne podľa modelu?

Výsledok:

→ Svietivosť: 1 $L_{\odot}$; Teplota: 5780 K; Áno, nachádza sa v obývateľnej zóne.

Príklad 16

Hviezda hlavnej postupnosti má teplotu 9000 K a svietivosť 25-násobnú oproti Slnku. Určte:

- Polomer hviezdy v násobkoch slnečného polomeru.

- Do akej spektrálnej triedy patrí?
- Hmotnosť hviezdy (odhadom z HR diagramu).

Výsledok:

→ Polomer: $2.8 R_{\odot}$; Trieda: A0; Hmotnosť: približne $2.2 M_{\odot}$.

Príklad 17

Hviezda mala na začiatku života hmotnosť $8 M_{\odot}$. Po vyčerpaní paliva explodovala ako supernova a vznikla neutrónová hviezda s polomerom 12 km. Určte:

- Pomer objemu pôvodnej hviezdy a neutrónovej hviezdy (v miliónoch).
- Hustotu neutrónovej hviezdy.
- Porovnanie gravitačného zrýchlenia na povrchu oboch telies.

Výsledok:

→ Pomer objemov: cca 2×10^6 ; Hustota: $3 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$; Gravitačné zrýchlenie: $g_{NS} \sim 1.5 \times 10^{12} \text{ m/s}^2$

Príklad 18

Biely trpaslík má hmotnosť ako Slnko, ale jeho polomer je iba $0.01 R_{\odot}$. Určte:

- Povrchovú gravitáciu v porovnaní so Slnkom.
- Únikovú rýchlosť z povrchu bieleho trpaslíka.
- Ako by sa zmenila teplota telesa, ktoré padá z výšky 1000 km nad povrch?

Výsledok:

→ Gravitačné zrýchlenie: $\sim 10^5 g_{\odot}$; Úniková rýchlosť: cca 6000 km/s; Kinetická energia by viedla k extrémnemu ohriatiu – nad milión K.

Príklad 19

Hviezda podobná Slnku má okolo seba planétu, ktorá spôsobuje zníženie jasnosti o 1 %. Tranzit trvá 10 hodín a opakuje sa každých 365 dní. Urč:

- Priemer planéty v km.
- Polomer jej obežnej dráhy.
- Hustotu planéty, ak jej hmotnosť bola určená ako 5-násobok hmotnosti Zeme.

Výsledok:

→ Priemer: cca $1.4 R_{Zem}$; Polomer dráhy: cca 1 AU; Hustota: približne 8 g/cm^3 .

Príklad 20

Spektroskopickou metódou bola pri hviezde typu G0 zistená zmena radiálnej rýchlosti $\pm 60 \text{ m/s}$ s periódou 50 dní. Predpokladajme, že planéta má kruhovú dráhu a jej hmotnosť je výrazne nižšia ako hviezdy. Urč:

- Hmotnosť planéty vo vzťahu k hmotnosti Jupiteru.
- Vzdialenosť planéty od hviezdy.

- Typ planéty podľa veľkosti.

Výsledok:

→ Hmotnosť: cca $0.2 M_{\text{Jup}}$; Vzdialenosť: cca 0.25 AU; Typ: horúci Neptún.

Príklad 21

Exoplanéta obieha svoju hviezdu vo vzdialenosti 0.04 AU. Efektívna teplota hviezdy je 5800 K. Urč:

- Rovnovážnu teplotu planéty (zanedbaj atmosféru).
- Zmenilo by sa niečo, keby mala planéta vysoké albedo?
- V akej vzdialenosti by bola planéta v obývateľnej zóne?

Výsledok:

→ Teplota: cca 1500 K; Pri vysokom albedu by bola nižšia (napr. 1100–1200 K); Obývateľná zóna pre túto hviezdu: cca 0.95–1.4 AU.

Príklad 22

V špirálovej galaxii bola nameraná rýchlosť rotácie hviezd vo vzdialenosti 20 000 svetelných rokov od centra ako 240 km/s. Odhadni:

- Hmotnosť hmoty vo vnútri tejto vzdialenosti.
- Ako by sa líšil výsledok, ak by sme nebrali do úvahy temnú hmotu?
- Je tento údaj v súlade s očakávanou rotačnou krivkou?

Výsledok:

→ Hmotnosť: cca $1.3 \times 10^{11} M_{\odot}$; Bez temnej hmoty by výsledná rýchlosť rotácie klesala; Dáta podporujú prítomnosť temnej hmoty.

Príklad 23

Dve galaxie sa od seba vzdďaľujú rýchlosťou 21 000 km/s. Použi Hubblov zákon s $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$ a vypočítaj:

- Ich vzdialenosť v megaparsekoch a svetelných rokoch.
- Či je takáto vzdialenosť pozorovateľná súčasnými ďalekohľadmi.
- Koľko rokov by trvalo, kým by sa ich vzdialenosť zdvojnásobila?

Výsledok:

→ Vzdialenosť: $300 \text{ Mpc} \approx 978 \text{ miliónov ly}$; Áno, moderné teleskopy vidia ešte ďalej; Zdvojnásobenie vzdialenosti za cca 10 miliárd rokov (približne).

Príklad 24

Eliptická galaxia má svietivosť $2 \times 10^{11} L_{\odot}$ a hmotnosť $10^{12} M_{\odot}$. Urč:

- Pomerný jas (hmotnosť/svietivosť) a porovnaj s Mliečnou dráhou.
- Čo môže spôsobovať rozdiel medzi hmotnosťou a svietivosťou?

- Odhadni podiel temnej hmoty v tejto galaxii.

Výsledok:

→ $M/L \approx 5$; Vyšší pomer ako v Mliečnej dráhe → prítomnosť temnej hmoty; Podiel temnej hmoty cca 80–90 %.

Príklad 25

Pozorovaním vzdialenej galaxie sme zaznamenali červený posun $z = 3.5$. Pomocou kozmologických rovníc (zjednodušene pri plochom vesmíre s $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$, $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$) urč:

- Vzdialenosť tejto galaxie (konštantnú a svetelnú).
- Čas, ktorý uplynul od okamihu, keď svetlo vyžiarila.
- Ako starý bol vtedy vesmír?

Výsledok:

→ Konštantná vzdialenosť: cca 5.5 Gpc; Svetelná vzdialenosť: cca 1.7 Gpc; Svetlo cestovalo ~12 miliárd rokov; Vek vesmíru vtedy: ~1.8 miliardy rokov.

Príklad 26

V modelovom vesmíre bez temnej energie ($\Omega_\Lambda = 0$) a s hustotou hmoty $\Omega_m = 1$, vypočítaj:

- Ako by sa menil rozmer vesmíru so časom?
- Koľko by mal vesmír dnes rokov, ak by sme pozorovali súčasnú hodnotu Hubblovej konštanty $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$?
- Porovnaj to s vekom vesmíru v modeli s tmavou energiou.

Výsledok:

→ Rozmer $a(t) \sim t^{2/3}$; Vek vesmíru: ~9.3 miliardy rokov; V súčasnom modeli: ~13.8 miliardy rokov → temná energia "spomaľuje starnutie".

Príklad 27

Pozorovaním kozmického mikrovlnného pozadia (CMB) získame údaj o teplote ~2.73 K. Urč:

- Teplotu vesmíru v čase, keď mal vek 380 000 rokov.
- Vlnovú dĺžku žiarenia vtedy a dnes.
- Ako súvisí táto zmena so samotným rozpínaním vesmíru?

Výsledok:

→ Teplota: cca 3000 K; Vlnová dĺžka sa zväčšila cca 1100× ($z \sim 1 \text{ } \mu\text{m}$ na $\sim 1 \text{ mm}$); Dôsledok rozpínania → fotóny „chladnú“ s rozpínajúcim sa priestorom.

Príklad 28

Astronóm pozoruje hviezdu, ktorá kulminuje o 22:00 miestneho času 10. marca. O mesiac neskôr kulminuje o 20:00.

- Určite siderický deň v porovnaní so slnečným.

- Vypočítajte dĺžku siderického dňa v hodinách, minútach a sekundách.
- Ako by sa javila denná zmena hviezdneho času?

Výsledok:

→ Rozdiel: 4 minúty za deň; Siderický deň ≈ 23 h 56 min 4 s; Hviezdny čas sa denne posúva o $\approx +4$ min.

Príklad 29

Určite dátum jarnej rovnodennosti pre rok 2025. Zároveň určte ekliptickú dĺžku Slnka v ten deň a porovnajte ju s priemernou ročnou hodnotou.

- Ako sa tento dátum mení vplyvom precesie?
- Aký bude rozdiel o 2000 rokov?

Výsledok:

→ Rovnodennosť: 20. marec 2025; Ekliptická dĺžka: 0° ; Posun v dôsledku precesie: cca 1° každých 72 rokov $\rightarrow$ 2000 rokov $\approx 27.8^\circ$.

Príklad 30

Pomocou stredovekého kvadrantu určte výšku Slnka na poludnie ako 65° . Dátum je 21. jún.

- Určte geografickú šírku pozorovateľa.
- Aká by bola výška Slnka na rovnodennosť a na zimný slnovrat z toho istého miesta?

Výsledok:

→ Zemepisná šírka: 48.5° ; Výška Slnka na rovnodennosť: 41.5° ; Na zimný slnovrat: 18.5° .

Záver

Keď som sa púšťal do tvorby tejto zbierky, nechcel som vytvoriť len ďalšiu sadu príkladov na počítanie. Mojm cieľom bolo ponúknuť niečo viac – **cestu**, na ktorú sa môže vydať každý, koho zaujíma obloha, kto sa niekedy pozrel hore a položil si otázku: „Ako to tam vlastne funguje?“

Astronómia je pre mňa nielen vedou o vesmíre, ale aj **príbehom ľudskej zvedavosti, odvahy a túžby pochopiť neznáme**. Nie je to jednoduchá veda – kombinuje fyziku, matematiku, predstavivosť aj pokoru. No práve to z nej robí niečo výnimočné.

Táto zbierka vznikala s myšlienkou **podporiť záujem o astronómiu nielen medzi študentmi**, ale aj medzi všetkými, ktorí hľadajú výzvy, radi premýšľajú a neboja sa počítať. V každom príklade, v každom výpočte, v každom výsledku sa skrýva kúsok reality vesmíru, ktorý nás obklopuje.

Verím, že ste si v týchto stránkach našli niečo inšpirujúce. Možno ste pochopili, ako funguje spektrum hviezd, možno ste prvýkrát prepočítali vzdialenosť ku galaxii, alebo len pocítili radosť z vyriešenej úlohy. A možno ste zistili, že **aj v číslach sa dá objaviť krása**.

Ďakujem Vám, že ste sa na túto cestu vydali so mnou.

A ak sa niekedy budete dívať na hviezdnu oblohu a počítat' si v hlave, ako ďaleko asi tá hviezda je – vedzte, že ste na dobrej ceste.

S jasnou oblohou,

Mgr. Marián Krajčovič

riaditeľ hvezdárne v Partizánskom (2025)